

۱. آیا عددی طبیعی $n > 2$ وجود دارد که اگر با هر یک از مقسوم‌علیه‌های اول خود جمع شود عددی مربع کامل بدست آید؟

۲. علی و شایان روی یک جدول بی‌نهایت به شکل نوبتی بازی می‌کنند. در ابتدا تمام خانه‌ها سفید هستند. علی بازی را شروع می‌کند و در نوبت اول یکی از مربع‌های واحد صفحه را سیاه می‌کند. در نوبت‌های بعد هر نفر باید یک خانه‌ی سفید که مجاور ضلعی حداقل یک خانه‌ی سیاه باشد را سیاه کند. بازی پس از اینکه هر نفر دقیقاً ۱۴۰۴ نوبت بازی کند تمام می‌شود. مجموعه‌ی خانه‌های سیاه در انتهای بازی را A می‌نامیم. علی و شایان به ترتیب می‌خواهند محیط شکل A را کمینه و بیشینه کنند. اگر هر دو نفر بهترین بازی خود را انجام دهند محیط شکل A برابر چه مقداری خواهد بود؟ (منظور از محیط شکل A جمع طول پاره‌خط‌هایی است که مرز یک خانه سیاه و یک خانه سفید هستند).

۳. P درون مثلث مختلف الاضلاع ABC با مرکز دایره محاطی I به گونه‌ای قرار دارد که :

$$2\angle ABP = \angle BCA, 2\angle ACP = \angle CBA$$

@pi_mosbat_math

فرض کنید PB و PC خط AI را به ترتیب در B' و C' قطع می‌کنند. خط گذرا از B' و موازی AB خط BI را در X و خط گذرا از C' و موازی با AC خط CI را در Y قطع می‌کند. ثابت کنید: مثلث‌های PXY و ABC متشابه‌اند.

۴. مثلث حاده و مختلف‌الاضلاع ABC با مرکز دایره محیطی O مفروض است. CO و BO ارتفاع وارد از A به BC را به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند. X مرکز دایره محیطی OPQ و O' قرینه O نسبت به BC است. Y تقاطع دوم دوائر محیطی مثلث‌های BXP و CXQ است. نشان دهید نقاط X, Y, O' هم‌خطند.

۵. همه‌ی تابع‌ها مانند $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ را پیدا کنید به طوری که برای هر $x, y, z > 0$ داشته باشیم

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) \leq f(x + y + z) \cdot f(xy + yz + zx) \leq 3(x^3 + y^3 + z^3).$$

۶. علی یک میهمانی بزرگ ترتیب داده‌است و همراه $n-1$ نفر از دوستانش دور یک میز دایره‌ای n -نفره نشسته‌اند؛ علی برای پذیرایی n سیب در مقابل خودش قرار داده‌است و می‌خواهد آن را میان همه توزیع کند. از آنجا که علی و دوستانش تک‌خوری را دوست ندارند و تا به همه سیب نرسد شروع به خوردن نمی‌کنند، در هر گام هر کسی که حداقل یک سیب دارد به طور هم‌زمان، یک سیبش را به اولین نفر بدون سیب از سمت راستش می‌دهد (در جهت پادساعت‌گرد). به ازای چه مقادیری از n ، پس از تعدادی گام، به وضعیتی می‌رسیم که هر نفر دقیقاً ۱ سیب داشته باشد؟

برای مثال اگر در شکل زیر هر عدد نمایانگر تعداد سیب‌های هر نفر باشد، وضعیت سمت چپ بعد از یک گام به وضعیت سمت راست تبدیل می‌شود.

