

سوال ۱. کیمیا ساعت عجیبی دارد. عقربه ثانیه شمار این ساعت درست کار نمی‌کند و در هر لحظه به جای یک ثانیه به طور تصادفی ۳۴ یا ۴۷ ثانیه جابجا می‌شود. مثلاً اگر در یک لحظه ساعت زمان ۱۲:۲۳:۰۵ را نشان دهد ممکن است در لحظات بعدی به ترتیب زمان‌های

$$۱۲:۲۳:۳۹, ۱۲:۲۴:۱۳, ۱۲:۲۵:۰۰, ۱۲:۲۵:۳۴, ۱۲:۲۶:۲۱, \dots$$

را نشان دهد. ثابت کنید همواره لحظه‌ای وجود دارد که عقربه ثانیه‌شمار عدد مربع کاملی را نشان می‌دهد.

راه حل: ابتدا مشاهده کنید که اگر در لحظه‌ای عقربه ثانیه شمار روی ۳۶ یا ۴۹ قرار بگیرد به خواسته‌مان می‌رسیم، در مرحله بعدی اگر عقربه روی ۲ قرار بگیرد به خواسته‌مان می‌رسیم چرا که در گام بعدی باید روی یکی از $۴۹ = ۳۶ + ۱۳$ یا $۳۶ = ۲ + ۳۴$ قرار گیرد. به طور بازگشتی دنباله اعداد خوب را این طور تعریف می‌کنیم که ۳۶، ۴۹ خوبند و در هر مرحله اگر برای عدد y ، $y + ۳۴$ ، $y + ۴۷$ هر دو خوب بودند y را به اعداد خوب اضافه می‌کنیم. قرار گرفتن ساعت روی هر عدد خوب ما را به خواسته‌مان می‌رساند چرا که بعد از تعدادی مرحله هر عدد خوب حتماً به ۳۶ یا ۴۹ می‌رسد. ادعا می‌کنیم اگر y خوب باشد $y + ۱۳$ هم خوب است. (جمع‌ها را به پیمانه ۶۰ انجام می‌دهیم یعنی باقی‌مانده آن‌ها بر ۶۰ را در نظر می‌گیریم). داریم

$$(y + ۱۳) + ۳۴ = y + ۴۷$$

و

$$(y + ۱۳) + ۴۷ = y + ۶۰ \equiv y$$

که طبق فرض هر دو خوب هستند. بنابراین باقی‌مانده تمام اعداد به فرم $۳۶ + ۱۳k$ بر ۶۰ خوب هستند. باقی‌مانده اعداد

$$۳۶ + ۱۳k, ۰ \leq k \leq ۵۹$$

دو به دو بر ۶۰ متفاوت است، چرا که

$$۶۰ \nmid (۳۶ + ۱۳k) - (۳۶ + ۱۳k') = ۱۳(k - k'), ۰ \leq k, k' \leq ۵۹$$

(برای دیدن این موضوع می‌توانید از لم اقلیدس استفاده کنید) بنابراین تمامی اعداد خوب هستند و ساعت با شروع از آن‌ها حتماً به یکی از اعداد ۳۶ یا ۴۹ می‌رسد.

@pi_mosbat_math

سوال ۲. همهی دنباله‌های $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $n \geq 3$ داشته باشیم:

$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2} a_n} = 1 - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2}$$

پاسخ:

ابتدا برای $n = 3$ داریم

$$\frac{1}{a_1 a_3} = 1 - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \quad (1)$$

این رابطه نتیجه می‌دهد $a_1 = 1$ چرا که در غیر این صورت خواهیم داشت $a_1 \geq 2$ و بنابراین

$$\frac{1}{a_1 a_3} \leq \frac{1}{2} < \frac{4}{5} \leq 1 - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \quad (2)$$

هم چنین واضح است که $a_3 \neq 1$ چرا که در غیر این صورت چپ تساوی ۱ برابر یک می‌شود که به طور اکید از طرف راست بزرگ‌تر است. بنابراین مشابه نامساوی ۲ نتیجه می‌گیریم $a_2 = 1$.

حال با قرار دادن در رابطه بازگشتی بدست می‌آید $a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, \dots$ و دو طرف رابطه برابرند با $\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{14}{64}, \dots$. بنابراین حدس می‌زنیم $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (دنباله معروف فیبوناچی) و دو طرف رابطه برای n برابرند با

$$\frac{a_n a_{n-1} - 1}{a_n a_{n-1}}$$

این موضوع را می‌توان به استقرا ثابت کرد، پایه استقرا برقرار است فرض کنید حکم برای $n-1$ برقرار باشد، واضح است که رابطه بازگشتی a_n را به طور یکتا مشخص می‌کند پس کافی است چک کنیم

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

در رابطه بازگشتی صدق می‌کند. با قرار دادن در رابطه باید بررسی کنیم

$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_{n-3}} + \frac{1}{a_n a_{n-2}} = 1 - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2} = 1 - \frac{1}{a_n a_{n-1}}$$

با استفاده از فرض استقرا داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_{n-3}} + \frac{1}{a_n a_{n-2}} &= 1 - \frac{1}{a_{n-1} a_{n-2}} + \frac{1}{a_n a_{n-2}} \\ &= 1 - \frac{1}{a_n - 2} \times \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \right) = 1 - \frac{1}{a_n - 2} \times \frac{a_n - 2}{a_{n-1} a_n} = 1 - \frac{1}{a_{n-1} a_n} \end{aligned}$$

همین‌طور بنا به فرض استقرا داریم،

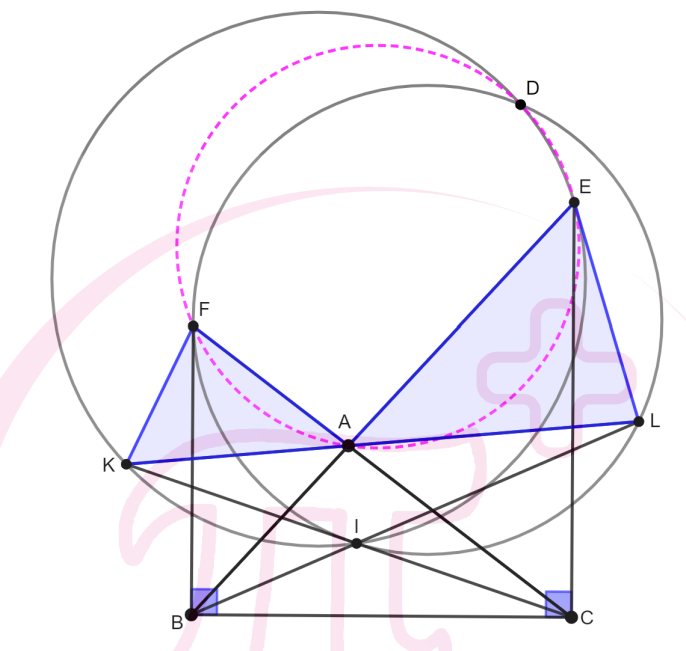
$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 = a_{n-2} a_{n-1} + a_{n-1}^2 = a_{n-1} (a_{n-2} + a_{n-1}) = a_{n-1} a_n$$

و کار تمام است.

سوال ۳. در مثلث ABC مرکز دایره‌های محاطی داخلی، محاطی خارجی نظیر راس B و محاطی خارجی نظیر راس C را به ترتیب I ، K و L می‌نامیم. خطوط عمود بر BC در B, C به ترتیب E, F را در AC, AB قطع می‌کنند. ثابت کنید دایره EIK, FIL, AEF هم‌مس هستند.

راه‌حل:

تقاطع دوم دایره محیطی مثلث‌های EIK و FIL را D می‌نامیم. پس داریم:



$$\angle EDI = \angle EKI$$

$$\angle FDI = \angle FLI$$

کافیست نشان دهیم $\angle FDE = 180^\circ - \angle A$. می‌دانیم K, A, L هم‌خط هستند. از آنجایی که $\angle ACL = \angle AKB = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$ و $\angle LAC = \angle BAK = \frac{\angle A}{2}$ ، دو مثلث AKB و ACL متشابه بوده و داریم:

$$\frac{AC}{AK} = \frac{AL}{AB}$$

همچنین از آنجایی که $CE \parallel BF$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AF \times AE = AB \times AC = AL \times AK \Rightarrow \frac{AF}{AL} = \frac{AE}{AK}$$

پس $ALE \sim AFK \rightarrow ALF \sim AEK$ داریم:

$$\begin{aligned} \angle EKI + \angle FLI &= \angle EKL + \angle LKI + \angle FLK + \angle KLI \\ &= \angle EKL + \angle FLK + 180^\circ - \angle LIK \\ &= \angle EKL + \angle AEK + 90^\circ - \frac{\angle A}{2} \\ &= 90^\circ - \frac{\angle A}{2} + 90^\circ - \frac{\angle A}{2} = 180^\circ - \angle A \end{aligned}$$

پس چهارضلعی $AEDF$ محاطی است و حکم اثبات می‌شود.

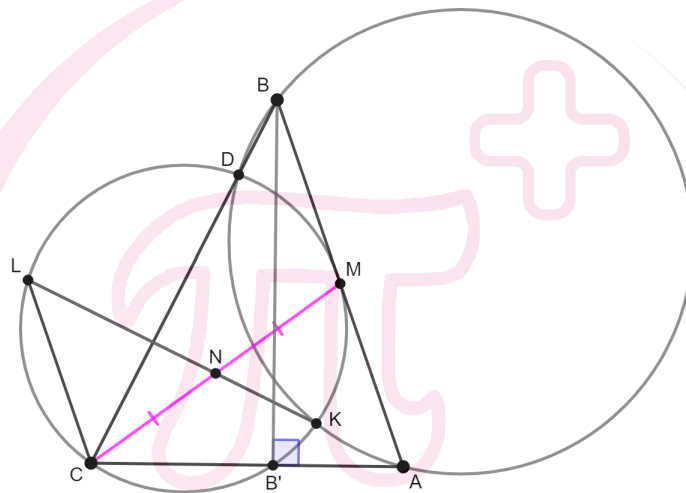
سوال ۴

ABC ، M وسط AB و B' پای ارتفاع B است. دایره $CB'M$ خط BC را برای بار دوم در D قطع می‌کند. دایره‌های $ABD, CB'M$ برای بار دوم در K متقاطع هستند. خط موازی AB که از C می‌گذرد، دایره $CB'M$ را برای بار دوم در L قطع می‌کند. ثابت کنید KL پاره خط CM را نصف می‌کند.

راه حل:

از آنجایی که $CL \parallel AB$ و $ABDK$ محاطی است داریم $\angle BCL = \angle ABD = \angle AKD - 180^\circ$ پس A, K, L همخط هستند.

همچنین از آنجایی که $B'M$ میانه وارد بر وتر است و $CB'ML$ محاطی است داریم $\angle MLC = \angle MB'A = \angle MAB'$ پس چهارضلعی $AMLC$ متوازی الاضلاع بوده و حکم اثبات می‌شود.



المپیاد ریاضی پی‌مثبت
@pi_mosbat_math

سوال ۵ سهند و غلام روی جدولی 1403×1403 که در ابتدا همه ی خانه‌های آن سفید هستند بازی می‌کنند. به ازای هر سطر و هر ستون یک دکمه داریم (مجموعاً ۲۸۰۶ دکمه). با شروع از سهند هر کس در نوبت خود یک دکمه که قبلاً فشار داده نشده را فشار می‌دهد، و سپس نوبت نفر دیگر می‌شود تا زمانی که تمام دکمه‌ها فشار داده شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط سهند تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشردن دکمه، کاملاً به رنگ مشکی تبدیل می‌شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط غلام تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشردن دکمه، کاملاً به رنگ قرمز تبدیل می‌شوند.

در انتها پس از این که همه دکمه‌ها فشردن شدند غلام به اندازه تعداد خانه‌های قرمز منهای تعداد خانه‌های سیاه و سهند به اندازه تعداد خانه‌های سیاه منهای تعداد خانه‌های قرمز امتیاز می‌گیرند اگر غلام و سهند هر دو بهترین بازی خود را انجام دهند، غلام حداقل چند امتیاز کسب خواهد کرد. (به بیان دیگر بیشترین امتیازی که غلام با بازی خوب خود مستقل از بازی سهند می‌تواند از کسب آن مطمئن باشد را بیابید.)

راه‌حل:

ادعا می‌کنیم پاسخ n است.

ابتدا استراتژی غلام برای رسیدن به این امتیاز را بیان می‌کنیم. هر گاه سهند یک سطر را فشار می‌دهد، غلام در نوبت بعد دکمه یک ستون را فشار می‌دهد و هر گاه سهند دکمه یک ستون را فشار می‌دهد غلام دکمه یک سطر را فشار می‌دهد. فرض کنید سهند در مجموع k سطر و $n - k$ ستون را انتخاب کند، در این صورت از ستونی که غلام متناظر با سطر i ام سهند انتخاب می‌کند حداقل $n - k + i$ خانه قرمز باقی می‌مانند چرا که تنها سطرهایی که سهند بعد از این انتخاب رنگ می‌کند می‌تواند رنگ یک خانه از این ستون را سیاه کند. از طرفی اگر غلام سطری انتخاب کند که در مجموع سطر j ام انتخاب شده باشد حداقل j خانه قرمز جدید می‌گیریم چرا که $n - j$ ستون باقی‌مانده که هر کدام از آن‌ها می‌توانند سیاه یا خانه‌ای که قبلاً شمرده شده باشند بنابراین در مجموع حداقل

$$(1 + 2 + \dots + n - k) + (n - k + 1 + n - k + 2 + \dots + n) = \frac{n^2 + n}{2}$$

خانه قرمز می‌گیریم که حداقل n تا از خانه‌های سیاه بیشتر است.

برای این که نشان دهیم غلام کار بهتری نمی‌تواند بکند باید نشان دهیم سهند راهبردی دارد که امتیازش حداقل n - بماند. فرض کنید سهند سطر اول را سیاه کند و از این به بعد هر گاه غلام سطری را انتخاب کرد ستونی را انتخاب کند و برعکس. مشابه قبل اگر غلام k ستون انتخاب کند و آخرین انتخابش یک ستون باشد حداقل

$$(1 + 2 + \dots + n - k) + (n - k + 1 + n - k + 2 + \dots + n - 1)$$

و اگر آخرین انتخابش یک سطر باشد حداقل

$$(1 + 2 + \dots + (n - k - 1)) + (n - k + 1 + n - k + 2 + \dots + n - 1 + n)$$

خانه سیاه می‌شوند که هر دو از $\frac{n^2 - n}{2}$ بیشتر مساوی‌اند.

راه‌های دیگری هم برای اثبات این قسمت وجود دارد، مثلاً استقرا و تحلیل بعد از حرکت اول غلام.

سوال ۶ فرض کنید p یک عدد اول است. همه اعداد طبیعی بزرگتر از یک x, y را بیابید که داشته باشیم

$$\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1} = (p + 1)^2$$

راه حل:

با طرفین وسطین رابطه سوال داریم

$$x^2 - 1 = ((p+1)y)^2 - (p+1)^2 \Rightarrow (p+1)^2 - 1 = ((p+1)y)^2 - x^2 \Rightarrow p(p+2) = ((p+1)y - x)((p+1)y + x)$$

از آنجا که p عددی اول است باید $p \mid (p+1)y - x$ یا $p \mid (p+1)y + x$. اگر p پرانتز اول را عاد کند داریم

$$(p+1)y + x \mid p + 2$$

با توجه به این که

$$(p+1)y + x$$

از $2p + 3$ بزرگتر است به مشکل نامساوی می خوریم.

بنابراین $p \mid (p+1)y + x$ که نتیجه می دهد $y \equiv -x \pmod{p}$. با قرار دادن $x = pk - y$ داریم

$$p(p+2) = (p(y-k) + 2y)(py + pk) \Rightarrow p+2 = (p(y-k) + 2y)(k+y)$$

اگر $y > k$ طرف راست از $3(p+4)$ بزرگتر می شود که تناقض است. اگر $y \leq k$ از آنجا که $k+y \leq p+2$ داریم $2y \leq p+2$. حال اگر $y - k \leq -2$ باشد

$$(p(y-k) + 2y)(k+y) < (k+y)(-2p + 2y)(k+y) \leq 0$$

که تناقض است. بنابراین $k = y + 1$. با جایگذاری داریم

$$(2y - p)(2y + 1) = p + 2 \Rightarrow 4y^2 + (1 - p)y - 2p - 2 = 0$$

که با اتحاد مربع نتیجه می دهد $y = \frac{p-1}{4}$ و مشاهده می کنیم

$$y = \frac{p-1}{4}, x = \frac{p(p+3)}{4} - \frac{p-1}{4}$$

تنها جواب های مساله هستند و p باید فرد باشد.