

به نام خدا
پی مثبت
دانش‌سرای مجازی المپیاد

آزمون مرحله دوم - سال ۱۴۰۱
۱۸ و ۱۹ اردیبهشت ۱۴۰۱

المپیاد ریاضی پی مثبت

@pi_mosbat_math

روز اول

سوال شماره ۱

مثلث ABC را در نظر بگیرید. نقاط D و E به ترتیب روی اضلاع AC و AB قرار دارند، به گونه‌ای که DE موازی BC است. خط ℓ خطی است که از A می‌گذرد و با BC موازی است. D' و E' قرینه‌های D و E نسبت به ℓ هستند. ثابت کنید که CE' ، DB' و ℓ هم‌مس هستند.

سوال شماره ۲

تمام توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که برای همه اعداد حقیقی x و y داشته باشیم:

$$f(xf(y) + f(x) + y) = xy + f(x) + f(y)$$

سوال شماره ۳

خانه‌های جدول $n \times n$ را به رنگ‌های سیاه و سفید رنگ‌آمیزی می‌کنیم. تمام n هایی را بیابید که بتوانیم خانه‌ها را با اعداد $1, 2, \dots, n$ پر کنیم به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- هر سطر، جایگشتی از اعداد $1, 2, \dots, n$ باشد و تعداد خانه‌های سیاه و سفید در هر سطر برابر باشد.
- هر ستون، جایگشتی از اعداد $1, 2, \dots, n$ باشد و تعداد خانه‌های سیاه و سفید در هر ستون برابر باشد.

روز دوم

سوال شماره ۴

در یک جدول $n \times n$ بعضی از خانه‌ها سیاه و بقیه سفید هستند. امیر و محمد هر کدام نسخه‌ای از این جدول دارند و تلاش می‌کنند تا کل جدول را قرمز کنند به روش زیر:

• اگر امیر خانه‌ای پیدا کند که تنها خانه سیاه در سطر خود باشد، رنگ تمام خانه‌های ستون آن را قرمز می‌کند.

• اگر محمد خانه‌ای پیدا کند که تنها خانه سیاه در ستون خود باشد، رنگ تمام خانه‌های سطر آن را قرمز می‌کند.

ثابت کنید که امیر می‌تواند تمام جدول را قرمز کند اگر و تنها اگر محمد هم می‌تواند.

سوال شماره ۵

دنباله $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید که در آن $a_1 = 2$ و برای $n \geq 1$ داریم:

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a_n.$$

نشان دهید که بی‌نهایت عدد n وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\frac{1}{n+1} a_n a_{n-1} \dots a_1$$

مربعی کامل از یک عدد طبیعی باشد.

@pi_moshat_math

سوال شماره ۶

در یک مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $BC = BA$ ، نقطه P به‌صورت دلخواه روی ارتفاع از رأس B انتخاب شده است. فرض کنید دایره محیطی مثلث BAP برای بار دوم در نقطه M با ضلع AC برخورد می‌کند. فرض کنید N قرینه‌ی نقطه M نسبت به وسط پاره خط AC باشد. پاره خط NP دایره محاطی مثلث BAP را در نقطه X (که $X \neq P$) قطع می‌کند، و AB دایره محیطی مثلث NAP را در نقطه Y (که $Y \neq A$) قطع می‌کند. مماس بر دایره محیطی مثلث NAP در نقطه A ضلع BP را در نقطه Z قطع می‌کند. نشان دهید که CZ بر دایره محیطی مثلث XYP مماس است.

موفق باشید.