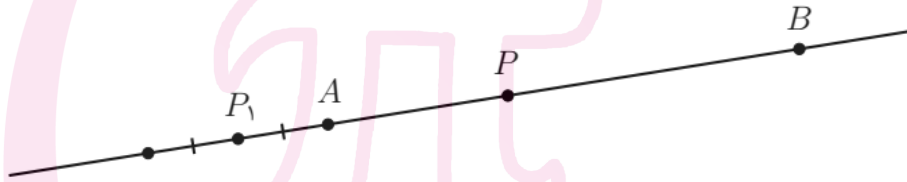


## مسئله‌های مرحله‌ی دوم المپیاد ریاضی ۱۴۰۰

### روزیکم

۱. روی خطی دو نقطه‌ی متمایز  $A$  و  $B$  قرار دارند. یکی از نقاط روی پاره‌خط  $AB$ ، به غیر از نقاط  $A$ ،  $B$  و وسط پاره‌خط  $AB$ ، را قرمز می‌کنیم. در هر مرحله یک نقطه‌ی قرمز را نسبت به یکی از نقاط  $A$  و  $B$  قرینه می‌کنیم، سپس فاصله‌ی نقطه‌ی جدید تا همان نقطه را نصف می‌کنیم و نقطه‌ی حاصل را قرمز می‌کنیم. برای مثال در شکل زیر اگر  $P$  یک نقطه‌ی قرمز باشد می‌توانیم  $P$  را نسبت به  $A$  قرینه کنیم سپس فاصله‌ی نقطه‌ی حاصل تا  $A$  را نصف کنیم تا به نقطه‌ی  $P_1$  برسیم و آن را قرمز کنیم.



آیا ممکن است پس از متناهی مرحله نقطه‌ی وسط  $AB$  قرمز شود؟

المپیاد ریاضی پی‌مثبت

۲. عدد طبیعی  $n$  را خوب می‌نامیم اگر رقم صفر نداشته باشد و بتوانیم یکی از ارقامش را حذف کنیم به طوری که عدد حاصل مقسوم علیه  $n$  شود. برای مثال ۲۵ یک عدد خوب است زیرا اگر رقم ۲ را حذف کنیم عدد حاصل برابر با ۵ می‌شود که مقسوم علیه ۲۵ است. ثابت کنید تعداد اعداد خوب متناهی است.

۳. چهارضلعی محیطی  $ABCD$  با دایره محاطی  $\omega$  مفروض است.  $\omega$  در نقاط  $E$  و  $F$  بر  $BC$  و  $AD$  مماس است و  $DE$  برای بار دوم  $\omega$  را در  $X$  قطع می‌کند. اگر دایره محیطی مثلث  $DXF$  بر خطوط  $AB$  و  $CD$  مماس باشد، ثابت کنید چهارضلعی  $AFXC$  محاطی است.

## روز دوم

۴.  $n$  نقطه روی محیط دایره‌ی  $\omega$  قرار دارند. می‌دانیم دایره‌ای با شعاع کمتر از  $\omega$  وجود دارد که همه‌ی  $n$  نقطه داخل یا روی آن باشند. ثابت کنید قطری از  $\omega$  وجود دارد که دو سر آن جزء نقاط نباشند و همه‌ی نقاط در یک سمت آن قرار گیرند.

۵.  $1400$  عدد حقیقی داده شده‌اند. ثابت کنید حداقل سه‌تا از این اعداد مانند  $x$ ،  $y$  و  $z$  وجود دارند که

$$\left| \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^4 + y^4 + z^4 + 1} \right| < \frac{9}{1000}$$

۶. آیا چینی‌شی از  $1400$  عدد طبیعی (نه لزوماً متمایز) دور دایره وجود دارد به طوری که حداقل یکی از اعداد  $2021$  باشد و هر عدد برابر با مجموع ب.م.م دو عدد بعدی و ب.م.م دو عدد قبلی خود باشد؟ برای مثال اگر  $a, b, c, d$  و  $e$  پنج عدد متوالی دور دایره باشند باید داشته باشیم  $c = (a, b) + (d, e)$ .

المپیاد ریاضی پی‌مثبت

@pi\_mosbat\_math