

مسئله‌های مرحله‌ی دوم المپیاد ریاضی ۱۳۹۸

روز یکم، ۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۸

۱. فرض کنید سطح داخلی چهار ضلع یک مستطیل از جنس آینه باشد. از یکی از نقاط گوشه‌ای پرتوی نوری به داخل مستطیل تابانده‌ایم. این پرتو بعد از چند بار انعکاس به رأس غیرمجاور رأس اول رسیده است و پیش از آن به هیچ یک از رؤوس نرسیده است. ثابت کنید پرتوی نور پیش از این لحظه از مرکز مستطیل گذشته است. (توجه داشته باشید که هر گاه پرتوی نور به ضلعی برخورد می‌کند طوری منعکس می‌شود که زاویه تابش و زاویه بازتابش برابر باشند).

۲. مثلث ABC متساوی الساقین ($AB = AC$) است و نقطه دلخواه X روی ضلع BC قرار دارد. نقاط Y و Z به ترتیب روی اضلاع AB و AC قرار دارند به طوریکه $\angle YXB = \angle ZXC$. از B موازی با YZ رسم می‌کنیم تا XZ را در T قطع کند. ثابت کنید AT نیمساز زاویه A است.

۳. فرض کنید $n > 2$. ثابت کنید معادله‌ی زیر جوابی ندارد که در آن $x_1, \dots, x_n$ اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ باشند.

$$(x_1 \cdots x_n)^2 = x_1^3 + \cdots + x_n^3$$

روز دوم، ۱۳ اردیبهشت ۱۳۹۸

۴. دایره‌ای به قطر AB مفروض است. نقاط C و D روی دایره و دو طرف متفاوت AB قرار دارند. از D موازی با AC رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند و از C موازی با AD رسم می‌کنیم تا AB را در F قطع کند. نقاط A, B, C و D به‌گونه‌ای هستند که نقاط E و F درون دایره ایجاد شوند. عمود وارد از E بر AB ، BD را در X و عمود وارد از F بر AB ، BC را در Y قطع می‌کند. ثابت کنید اندازه محیط مثلث AXY دو برابر طول پاره خط CD است.

۵. چندجمله‌ای $1 + x^{1398}$ روی تخته نوشته شده است. روزبه و کیوان به نوبت این بازی را انجام می‌دهند. ابتدا نوبت روزبه است. هر بازی‌کن در نوبت خود یک عدد صحیح $1398 \leq k \leq 0$ انتخاب می‌کند و چندجمله‌ای روی تخته را با x^k جمع می‌کند. هر بار پس از اینکه کیوان حرکت خود را انجام داد اگر عدد حقیقی x موجود باشد که چندجمله‌ای روی تخته به ازای آن x منفی بشود، روزبه برنده می‌شود و کیوان می‌بازد و بازی تمام می‌شود. در غیر این صورت بازی ادامه می‌یابد. ثابت کنید روزبه هرطور بازی کند کیوان می‌تواند به نحوی بازی کند که هیچ‌گاه نبازد.

۶. جدولی با ۵۶ نقطه در ۷ ردیف ۸ تایی، با فواصل برابر، در نظر بگیرید. دو نقطه از نقاط جدول را به عنوان نقاط قرینه‌ساز مشخص می‌کنیم؛ نقطه‌ای از جدول را در نظر بگیرید و آن را نسبت به یکی از نقاط قرینه‌ساز قرینه کنید. در صورتی که نقطه جدید یکی از نقاط جدول بود این کار را تکرار کنید و این تکرار را ادامه دهید. نقاطی که با این کار به آن‌ها می‌رسیم را در یک دسته قرار می‌دهیم. نقاط قرینه‌ساز را طوری انتخاب کرده‌ایم که تعداد دسته‌ها کم‌ترین مقدار ممکن شود. تعداد دسته‌ها چند تا است؟ (در شکل زیر، ۵۶ نقطه همان تقاطع‌ها هستند و یکی از انتخاب‌های ممکن برای نقاط قرینه‌ساز با دو ستاره مشخص شده است.)

