

به نام خدا

مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

پنجشنبه، ۳۰ فروردین ۱۳۹۷

روز اول

زمان: چهار ساعت و نیم

۱. در دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ (که در آن $BC = AD$ و $AB \parallel CD$) نقطه P محل برخورد قطرهایست و دایره محیطی مثلث APB ، BC را در X قطع می کند. خط گذرا از D و موازی با BC ، AX را در Y قطع می کند. ثابت کنید

$$\angle YDA = 2 \times \angle YCA$$

۲. فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است. به جای این اعداد، اختلاف دوبه دوی آن ها را می نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد، $\binom{n}{2}$ عدد مثبت به دست آمده را می توان به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد.

۳. فرض کنید $k > a$ دو عدد طبیعی هستند و دو دنباله اکیدا صعودی $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ و $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت هستند که

$$(a^{r_1} + k)(a^{r_2} + k) \dots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k)(a^{s_2} + k) \dots (a^{s_n} + k)$$

ثابت کنید این دو دنباله برابر هستند، یعنی به ازای هر i داریم $r_i = s_i$.

بارم هر سوال ۱۵ نمره است.

به نام خدا

مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

جمعه، ۳۱ فروردین ۱۳۹۷

روز دوم

زمان: چهار ساعت و نیم

۴. همه توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x+y)f(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$$

۵. لامپ‌های سالن اجتماعات اداره‌ای با ۵ کلید روشن و خاموش می‌شوند؛ هر کلید به یک یا چند لامپ متصل است و با تغییر وضعیت هر کلید، وضعیت لامپ‌های متصل به آن تغییر می‌کند. می‌دانیم که مجموعه لامپ‌های متصل به هر دو کلید، متفاوت است. ثابت کنید اگر در ابتدا همه لامپ‌ها خاموش باشند، ۳ کلید وجود دارد که با تغییر وضعیت همه آن‌ها، دست کم ۲ لامپ روشن می‌شود.

۶. دو دایره ω_1 و ω_2 یک‌دیگر را در نقاط P و Q قطع می‌کنند. خطی دل‌خواه که از P می‌گذرد و ω_1 و ω_2 را به ترتیب در A و B قطع می‌کند. خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا ω_1 را در D و F و ω_2 را در C و E قطع کند به طوری که E و F بین C و D باشند. محل تقاطع BE و AD را X ، محل تقاطع AF و BC را Y و قرینه P نسبت به CD را R می‌نامیم.

الف) ثابت کنید R روی XY قرار دارد.

ب) ثابت کنید PR نیم‌ساز زاویه $\angle XPY$ است.

بارم هر سوال ۱۵ نمره است.