

به نام او

در ادامه، راه حل سؤال های آزمون مرحله دوم سی و پنجمین المپیاد ریاضی آمده است. در این مورد لازم است به چند نکته اشاره شود:

۱. از نظر کمیته علمی المپیاد ریاضی راه حل های این سؤالات محدود به این ها نیست و هر راه حل درستی مورد قبول قرار خواهد گرفت.

۲. کمیته علمی المپیاد ریاضی و تیم مصحح هر سؤال، تا قبل از شروع تصحیح برگه ها و در طول تصحیح تلاش خواهند کرد راه حل های دیگر را نیز شناسایی کنند و در بارم بندی به آن ها توجه داشته باشند.

۳. آن چه در ادامه می آید ممکن است در بیان برخی جزئیات کامل نباشد زیرا هدف این است که دبیران و دانش آموزان عزیز با کلیات راه حل ها آشنا شوند و اگر راه حل دیگری دارند آن را به اطلاع کمیته علمی المپیاد ریاضی برسانند.

۴. لطفاً اگر می خواهید راه حل جدیدی ارسال کنید، آن را بادقت و منظم بنویسید. حتماً راه حل های موجود را مطالعه فرمایید و از فرستادن راه حل تکراری اجتناب کنید.

با تشکر،

کمیته علمی المپیاد ریاضی

اردیبهشت ۱۳۹۶

المپیاد ریاضی پی مثبت

@pi_mosbat_math

۱. در این سؤال منظور از (a, b) ، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b است.

الف) ثابت کنید دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots$ از اعداد طبیعی وجود ندارد که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$ که $i < j$

$$(a_i + j, a_j + i) = 1.$$

ب) گیریم p عددی اول و فرد باشد. ثابت کنید دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots$ و... از اعداد طبیعی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$ که $i < j$ ، عبارت $(a_i + j, a_j + i)$ بر p بخش‌پذیر نباشد.

راه حل:

الف) اگر i, a_i, j و a_j همگی زوج یا همگی فرد باشند $(a_i + j, a_j + i)$ زوج می‌شود. پس به جز حداکثر دو مقدار i زوجیت i و a_i متفاوت است پس i و j وجود دارند که i فرد و j زوج باشد و a_i زوج و a_j فرد باشد که مجدداً $(a_i + j, a_j + i)$ زوج می‌شود.

ب) دنباله را چنین می‌سازیم:

$$a_n = pn - n + 1$$

اگر $p|pn - n + 1 + m$ و $p|pm - m + 1 + n$ با کم کردن دو رابطه داریم:

$$p|n - m$$

اگر با رابطه اول جمع کنیم $p|pn + 1$ ، که تناقض است.

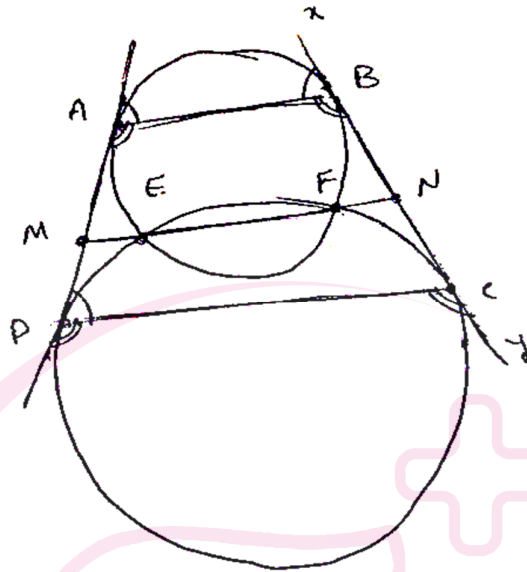
نکته: راه‌های دیگری هم برای ساختن این دنباله وجود دارد.

المپیاد ریاضی پی‌مثبت

@pi_mosbat_math

۲. نقطه P داخل دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ ، که در آن $AB \parallel CD$ ، طوری انتخاب شده که $\widehat{APB} > \widehat{ADC}$ و $\widehat{DPC} > \widehat{ABC}$. ثابت کنید $AB + CD > AD + BC$.

راه حل:



در دوزنقه متساوی الساقین مورد رسم $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$ و $\widehat{ADC} = \widehat{ABX}$

از زاویه ای که در A و B بر AD و BC می باشد می دانیم که نقطه P درون این دایره است. پس $\widehat{APB} > \widehat{ABX}$. همچنین از زاویه ای که در C و D بر BC و AD می باشد می دانیم که نقطه P درون این دایره است. پس این دایره هر دو راد در دو نقطه قطع می کند. از این دو نقطه E و F می رسم EF را رسم کنیم

و AD و BC را در M و N قطع می کنیم.

پس داریم $NE \cdot NF = NB^2 = NC^2$ و $ME \cdot MF = MA^2 = MD^2$

پس $NE + NF > NB + NC$ و $ME + MF > MA + MD$

پس $ME + MF + NE + NF > MA + MD + NB + NC$

و چون $MA + MD + NB + NC = AD + BC$ و $ME + MF + NE + NF = MN$ داریم:

$MN > AD + BC$

و چون $MN = AB + DC$ داریم:

$AB + DC > AD + BC$

۳. جدولی $n \times n$ داریم که n بر ۳ بخش پذیر است. می‌خواهیم برخی از خانه‌های جدول را سیاه کنیم با این شرط که در هر زیرجدول $m \times m$ از آن، که $m > 1$ ، تعداد خانه‌های سیاه از تعداد خانه‌های سفید بیش‌تر نباشد. حداکثر چند خانه را می‌توانیم سیاه کنیم؟

راه‌حل:

فرض کنید n برابر $3k$ باشد. نشان می‌دهیم جواب مسأله برابر $4k^2$ است: اگر جدول را به مربع‌های 3×3 افزایش کنیم، به تعداد k^2 مربع به وجود می‌آید که در هر یک حداکثر ۴ خانه سیاه داریم، در نتیجه حداکثر $4k^2$ خانه سیاه داریم. (۱)

شکل زیر مثالی با $4k^2$ خانه سیاه را نشان می‌دهد، زیرا هر جدول 3×3 دقیقاً ۴ خانه سیاه در آن دارد.



در این شکل رنگ‌آمیزی در راستاهای افقی و عمودی تناوب ۳ دارند.

یک زیرمربع $m \times m$ دل‌خواه را در نظر بگیرید. با استقرا روی m ثابت می‌کنیم مربع $m \times m$ روی این جدول ویژگی مسأله را دارد.

پایه استقرا: $m = 2, 3$ با بررسی ۹ حالت 2×2 و ۹ حالت 3×3 می‌بینیم که رنگ‌آمیزی ارائه‌شده این ویژگی را دارد.

حکم را برای $m = 2, 3, \dots, S-1$ فرض می‌کنیم و برای $m = S$ ثابت می‌کنیم.

در حالتی که S زوج است:

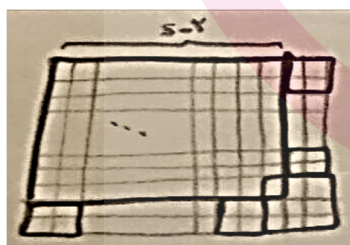
زیرمربع $S \times S$ را به مربع‌های 2×2 افزایش می‌کنیم و طبق فرض استقرا هر مربع 2×2 در جدول حداکثر ۲ مربع سیاه دارد، پس مربع $S \times S$ نیز حداکثر نصف خانه‌هایش سیاه است.

در حالتی که S فرد است:

با توجه به فرض استقرا تعداد خانه‌های سیاه مربع $S \times S$ کوچک‌تر یا

مساوی عبارت زیر است:

$$\begin{aligned} & \frac{(S-2)^2 - 1}{2} + 2 \times \left(2 \times \frac{S-3}{2} \right) + \frac{3^2 - 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (S^2 - 4S + 4 - 1 + 4S - 12 + 9 - 1) \\ &= \frac{S^2 - 1}{2} \end{aligned}$$



۴. گیریم x و y دو عدد حقیقی مثبت و متمایز باشند که $x^4 - y^4 = x - y$. ثابت کنید:

$$\frac{x - y}{x^6 - y^6} \leq \frac{4}{3}(x + y).$$

راه حل:

می دانیم

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 1 \Rightarrow (x^2 + y^2)(x + y) = 1$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &\geq \frac{3}{4} \frac{(x - y)}{x + y} \\ \Leftrightarrow x^6 - y^6 &\geq \frac{3}{4} (x^2 + y^2)(x - y) \\ \Leftrightarrow x^6 - y^6 &\geq \frac{3}{4} (x^2 + y^2)(x^4 - y^4) \\ \Leftrightarrow x^6 - y^6 &\geq -3x^2y^4 + 3x^4y^2 \\ \Leftrightarrow x^6 - y^6 &\geq 3x^2y^2(x^2 - y^2) \\ \Leftrightarrow x^6 + x^2y^2 + y^6 &\geq 3x^2y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - y^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

در نتیجه نابرابری مورد نظر برقرار است.

۵. پنج کودک باهوش دور میزی دایره ای نشسته اند. مربی تعدادی سیب را بین آن ها تقسیم می کند و می گوید: «من به برخی از شما تعدادی سیب داده ام و تعداد سیب هیچ دو نفری برابر نیست. هر کس علاوه بر این که تعداد سیب های خودش را می داند، سیب های دو نفری که در چپ و راستش هستند را هم می بیند.» سپس او تعداد کل سیب ها را اعلام می کند و از هر کس می خواهد که اختلاف تعداد سیب دو نفر روبه رویی خود را بگوید.

الف. ثابت کنید اگر تعداد سیب ها کم تر از ۱۶ باشد، دست کم یکی از کودکان می تواند با استدلال جواب درست را به دست آورد.

ب. نشان دهید اگر تعداد سیب ها ۱۶ باشد، مربی می تواند سیب ها را طوری تقسیم کند که هیچ کودکی نتواند جواب سؤال مربی را با اطمینان بفهمد.

راه حل:

الف) فرض می کنیم هیچ کودکی نتواند با استدلال جواب سؤال مذکور را بدهد و مجموع تعداد سیب ها دست کم ۱۶ است و به تناقض می رسیم.

لم) ثابت می کنیم جمع تعداد سیب های هر دو کودک مجاور دست کم ۵ است.

اولاً جمع تعداد سیب های دو کودک مجاور ۱ نیست چرا که تنها حالت ممکن ۰ سیب و ۱ سیب است و تفاضل یکتا مشخص می شود.

اگر جمع ۲ باشد نیز تنها حالت ۰ و ۲ ممکن است، زیرا تعداد سیب های هیچ دو کودکی برابر نیست. اگر جمع تعداد سیب های دو کودک مجاور ۳ باشد با توجه به این که تنها دو حالت $\{0, 3\}$ یا $\{1, 2\}$ ممکن است رخ داده باشد، پس تعداد سیب های کودکان دیگر نباید از اعضای مجموعه $\{0, 1, 2, 3\}$ باشد. پس جمع کل دست کم برابر با $3 + 4 + 5 + 6$ یعنی ۱۸ است که از ۱۶ بیش تر می شود.

به طور مشابه اگر جمع تعداد سیب های دو کودک مجاور ۴ باشد دو حالت داریم. پس تعداد سیب بقیه از مجموعه $\{0, 1, 3, 4\}$ نیست. پس جمع کل دست کم $4 + 5 + 6 + 7 = 17$ و از ۱۶ بیش تر است.

پس جمع تعداد سیب های هر دو کودک مجاور دست کم ۵ است. (لم اثبات شد.)

اگر ثابت کنیم یکی از کودکان دست کم ۶ سیب دارد مسأله حل می شود زیرا چهار نفر دیگر دو تا دو تا مجاورند پس طبق لم مجموعاً دست کم ۱۰ سیب دارند و تعداد کل سیب ها ۱۶ یا بیش تر خواهد شد.

اگر کودکی بدون سیب وجود داشته باشد طبق لم کودکان مجاورش باید ۵ و ۶ سیب داشته باشند که نتیجه مورد نظر ما را می دهد. لذا کافی است حالتی که تعداد سیب ها $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ است را رد کنیم.

ابتدا توجه کنید در چینش این اعداد دور میز، ۱ باید مجاور ۴ و ۵ باشد که می دانیم $4 + 1 = 5$ و تنها حالات $\{0, 5\}$ و $\{2, 3\}$ می ماند که چون ۵ آمده $\{2, 3\}$ نمی توانند بیایند، پس تناقض است و در نتیجه حکم مسأله ثابت شد.

ب) مثال $\{1, 4, 3, 2, 6\}$ جواب است چرا که جمع مجاورها ۷، ۸، ۵، ۷ و ۵ است. هر کدام از دو عدد مجاور، از نظر کودک روبه رویی می توانست یکی صفر و دیگری جمعشان باشد. مثلاً $\{4, 3\}$ می توانست $\{0, 7\}$ باشد. (توجه کنید که $\{0, 5, 7, 8\}$ در مجموعه اعداد روی دایره ظاهر نشده است.)

راه حل سؤال های آزمون مرحله دوم سی و پنجمین المپیاد ریاضی ایران

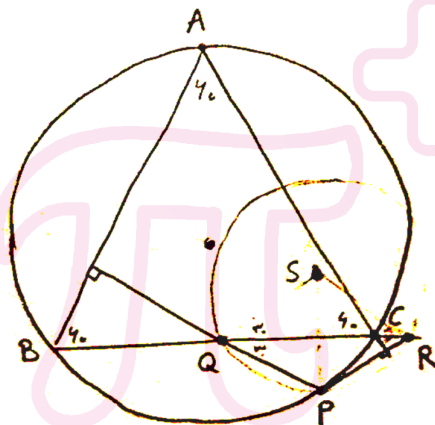
۶. X را نقطه ای متغیر روی دایره محیطی مثلث ABC می گیریم. از X بر AB و AC دو عمود رسم می کنیم تا خط گذرنده از BC را به ترتیب در P و Q قطع کنند. مرکز دایره گذرنده از X ، P و Q را Y می نامیم. (اگر X ، P و Q بر هم منطبق باشند همان نقطه را Y می گیریم).

الف. ثابت کنید اگر مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد، با تغییر X روی دایره محیطی، Y روی یک دایره حرکت می کند.

ب. عکس قسمت الف را ثابت کنید: اگر با تغییر X روی دایره محیطی، Y روی یک دایره حرکت کند، مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

راه حل:

الف) چون مثلث متساوی الاضلاع است، Q و R هر دو 30° درجه هستند و در نتیجه $PQ = PR$. فرض کنید S مرکز دایره محیطی مثلث PQR باشد.

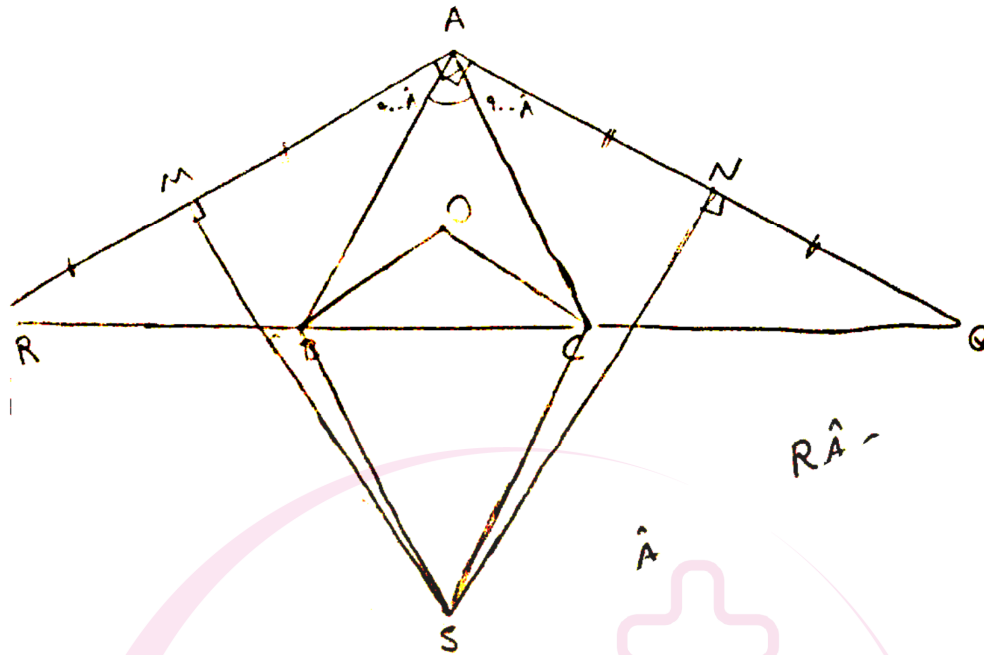


داریم $\widehat{QPR} = 120^\circ - 2 \times 30^\circ = 120^\circ$ در نتیجه اندازه کمان QR برابر 120° درجه است و لذا $\widehat{QSR} = 120^\circ$.

چون $SQ = SR$ پس $\angle SQR$ و $\angle SRQ$ هر دو 30° درجه هستند. پس مثلث های PQR و SQR نسبت به BC قرینه اند پس S قرینه P نسبت به BC است و حکم ثابت می شود.

ب) اگر P روی B یا C باشد به وضوح S مرکز دایره محیطی PQR روی B و C می افتد. اکنون اگر P روبه رو قطری A باشد S روی O قرار می گیرد. حال از روبه رو قطری A موازی BC رسم می کنیم و تقاطع آن با BC را P می گیریم. در این صورت مثلث PQR با حالت قبل متشابه بوده و انتقال یافته آن به موازات BC است در نتیجه مرکز این دایره نیز انتقال یافته O با بردار PP' است. اما واضح است که B و C و O و S روی یک دایره نیستند مگر این که PP' طول آن ها صفر باشد، که یعنی مثلث ABC متساوی الساقین باشد. حال به دو روش نشان می دهیم اندازه زاویه $\hat{A}$ برابر 60° درجه است.

روش اول: P را روی رأس A در نظر می گیریم.



با توجه به این که $\hat{A} = 180 - \angle RAQ$ داریم $\frac{\hat{A}}{2} = R = Q$.

$$\hat{A} < 60 \Rightarrow 90 - \hat{A} > \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow RB > AB, QC > AC$$

در نتیجه نقاط A و B در یک طرف عمودمنصف AR ، و نقاط A و C در یک طرف عمودمنصف AQ هستند پس $MSN > BSC$ و از طرفی چون MAN و $BOCS$ محاطی هستند داریم:

$$\left. \begin{array}{l} MSN = 180 - MAN = \hat{A} \\ BSC = 180 - BOC = 180 - 2\hat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow 180 - 2\hat{A} < \hat{A} \Rightarrow \hat{A} > 60.$$

که با فرض $\hat{A} < 60$ در تناقض است.

اگر هم فرض کنیم $\hat{A} > 60$ این بار تمام نابرابری‌های فوق برعکس می‌شوند و نتیجه می‌شود $\hat{A} < 60$ که باز تناقض است. فقط باید توجه شود که در مواقعی که S و A در یک سمت BC قرار دارند منظور از زاویه BSC قسمت بزرگ آن است.