



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



معاونت دانش پژوهان جوان

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۰ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی - روز اول

تاریخ : ۱۳۹۵/۲/۹ - ساعت : ۸:۳۰ مدت : ۲۷۰ دقیقه

شماره صندلی



@pi_mosbat_math

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- ۱- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.
- ۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.
- ۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- ۴- با توجه به آن که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوال‌ها را در برگه چکر نویس، حل کرده و سپس در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.
- ۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هر گونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- ۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۷- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- ۸- شرکت‌کنندگان در دوره تابستان از بین دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سؤالات و راه حل های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

آزمون مرحله دوم سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۹ و ۱۰ اردیبهشت ۱۳۹۵ در سراسر کشور و با شرکت دانش آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار شد. شرکت کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار و نیم ساعت به سه سؤال تشریحی پاسخ دادند. دفترچه پیش رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه حل آنهاست. لازم به ذکر است که این دفترچه صرفاً برای هدف آموزشی تهیه شده است و بarmبندی تصحیح آزمون، مستقلاً توسط گروهی از کارشناسان تهیه می شود.

@pi_mosbat_math



۱. فرض کنید $0 < a \leq b \leq c$ ، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^2}{6c} \leq \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

(۷ نمره)





۲. مثلث ABC با دایره محیطی w_1 مفروض است و داریم $\angle C = 2\angle B$. در نقطه A مماسی بر دایره w_1 رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطه E قطع کند. دایره w_2 را طوری رسم می‌کنیم که در نقطه C بر ضلع AC مماس باشد و هم‌چنین از نقطه B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطه F قطع می‌کند. از نقطه E مماس EK را بر دایره w_2 رسم می‌کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایره w_1 (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

(۷ نمره)

المپیاد ریاضی پی مثبت
@pi_mosbat_math



۳. فرض کنید شورایی شش عضو دارد و تصمیم‌ها در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضا گرفته می‌شود. یک «روش قابل قبول تصمیم‌گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجه نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجه نهایی باید باز هم مثبت باشد.

- شرط تقارن: اگر همه اعضا نظر خود را تغییر دهند، نتیجه نهایی نیز باید تغییر کند.



یک نوع روش قابل قبول تصمیم‌گیری، «رأی‌گیری وزن‌دار» است. به این ترتیب که به اعضا وزن‌های نامنفی $w_1, w_2, \dots, w_n$ و تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسه مجموع وزن رأی‌دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر $w_1 = 2$ و برای هر $w_i = 1, i \geq 2$ ، تصمیم‌گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود.

یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری مثال بزنید که به شکل رأی‌گیری وزن‌دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.

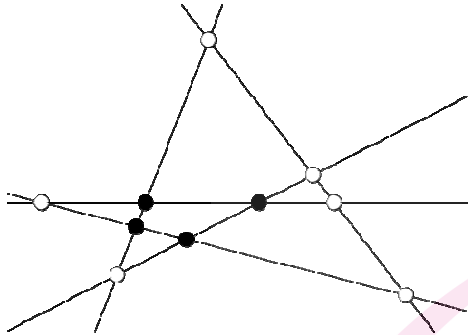
(۷ نمره)

المپیاد ریاضی پی‌مثبت

@pi_mosbat_math



۴. در صفحه $n \geq 3$ خط دوبه دو متقاطع رسم شده است که هیچ سه تایی از آن‌ها هم‌رس نیستند. یک نقطه تقاطع دو تا از این خط‌ها را «درونی» می‌گوییم، هرگاه در هر دو طرف این نقطه روی هر دو خط گذرا از این نقطه، نقاط تقاطع دیگری وجود داشته باشد. (برای مثال، در شکل روبه‌رو ۵ خط با ۴ نقطه تقاطع درونی نشان داده شده است که با دوایر توپر مشخص شده‌اند).



نشان دهید دست‌کم به تعداد $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ تا از نقاط تقاطع این n خط، درونی هستند.

(۷ نمره)

المپیاد ریاضی پی‌مثبت
@pi_mosbat_math



۵. چهارضلعی $ABCD$ و نقطه T داخل آن طوری انتخاب شده‌اند که AC نیم‌ساز زاویه $\angle BCD$ است،
 $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$ و همچنین $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$.
ثابت کنید: $\angle BAT = \angle DAC$.

(۷ نمره)





۶. همهٔ توابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق می‌کنند:
- به ازای هر دو عدد طبیعی x و y ، مقدار $f(x) + f(y)$ بر $x + y$ بخش پذیر است.
 - برای هر عدد طبیعی $x \geq 1395$ ، نابرابری $2f(x) \leq x^3$ برقرار است.

(۷ نمره)



۱. فرض کنید $0 < a \leq b \leq c$ ، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^2}{6c} \leq \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

راه حل اول. صرفاً برای خلاصه شدن عبارات، تعریف می کنیم $S = a + c$ و $P = ac$. در این صورت برای سمت راست نابرابری مسأله داریم:

$$R = \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{S+b}{3} - \frac{3Pb}{Sb+P}.$$

هدف این است که عبارت اخیر را به عنوان تابعی بر حسب متغیر b مینیمم کنیم؛ توجه کنید که عبارت مورد بحث بر حسب متغیر b شامل یک جزء خطی، یعنی $\frac{S+b}{3}$ و یک جزء کسری است که مخرج آن $Sb+P$ است. اکنون با تغییر متغیر $t = Sb + P$ عبارت را بازنویسی می کنیم و با کمی محاسبه ساده به عبارت زیر می رسیم:

$$R = \frac{S+b}{3} - \frac{3Pb}{Sb+P} = \frac{S^2 - 10P}{3S} + \frac{t}{3S} + \frac{3P^2}{St}.$$

اکنون توجه کنید که حاصل ضرب دو جمله آخر، عبارتی بدون متغیر t است. پس طبق نابرابری $u+v \geq 2\sqrt{uv}$ داریم:

$$R \geq \frac{S^2 - 10P}{3S} + 2\sqrt{\frac{P^2}{S^2}} = \frac{S^2 - 4P}{3S} = \frac{(c-a)^2}{3(c+a)} \geq \frac{(c-a)^2}{6c}.$$

راه حل دوم. برای راحتی در نوشتن، به ازای هر فرمول دلخواه $F(a, b, c)$ بر حسب سه متغیر a, b و c جمع دوری

$$F(a, b, c) + F(b, c, a) + F(c, a, b)$$

را با $\sum F(a, b, c)$ نمایش می دهیم. با این نمادگذاری سمت راست نابرابری مسأله را بسط می دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sum a}{3} - \frac{3}{\sum \frac{1}{a}} &= \frac{\sum a}{3} - \frac{3abc}{\sum ab} = \frac{(\sum a)(\sum ab) - 9abc}{3\sum ab} \\ &= \frac{\sum(a^2b + ab^2) - 6abc}{3\sum ab} = \frac{\sum a(b-c)^2}{3\sum ab}. \end{aligned}$$

بنابراین نابرابری مسأله معادل با نابرابری زیر است:

$$\sum a(b-c)^2 \geq \left(\frac{\sum ab}{3}\right)(c-a)^2. \quad (1)$$

اما توجه کنید که با توجه به ترتیب $a \leq b \leq c$ ، از $\frac{ab}{3c}$ بیشتر نیست و در نتیجه برای سمت راست نابرابری بالا داریم:

$$\left(\frac{\sum ab}{3}\right)(c-a)^2 = \left(\frac{ab}{3c} + \frac{a+b}{3}\right)(c-a)^2 \leq \left(\frac{a}{3} + b\right)(c-a)^2. \quad (2)$$

برای سمت چپ نابرابری (۱) هم به دست می آید:

$$\sum a(b-c)^2 \geq b(c-a)^2 + a((c-b)^2 + (b-a)^2). \quad (3)$$

حال توجه کنید که برای هر دو عدد X و Y ,

$$\begin{aligned} (X-Y)^2 \geq 0 &\implies X^2 + Y^2 - 2XY \geq 0 \implies 2(X^2 + Y^2) \geq (X+Y)^2 \\ &\implies X^2 + Y^2 \geq \frac{(X+Y)^2}{2}. \end{aligned}$$

در نتیجه اگر قرار دهیم، $X = c - b$, $Y = b - a$ ، با استفاده از نابرابری (۳) می توان نتیجه گرفت که:

$$\sum a(b-c)^2 \geq b(c-a)^2 + a((c-b)^2 + (b-a)^2) \geq b(c-a)^2 + \frac{a}{2}(c-a)^2.$$

و این نابرابری به همراه نابرابری (۲)، نابرابری (۱) که معادل حکم مسأله است را نتیجه می دهد.

توجه. راه حل های دیگری برای این سؤال را می توانید در صفحه زیر مشاهده کنید:

http://artofproblemsolving.com/community/c6h1234734_iran_inequality

المپیاد ریاضی پی مثبت

@pi_mosbat_math

۲. مثلث ABC با دایره محیطی w_1 مفروض است و داریم $\angle C = 2\angle B$. در نقطه A مماسی بر دایره w_1 رسم می کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطه E قطع کند. دایره w_2 را طوری رسم می کنیم که در نقطه C بر ضلع AC مماس باشد و همچنین از نقطه B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطه F قطع می کند. از نقطه E مماس EK را بر دایره w_2 رسم می کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایره w_1 (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

راه حل اول. اگر محل تقاطع FK و BC را D بنامیم، آنگاه در دایره w_2 داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ACB} &= \frac{\widehat{BC}}{2} \\ \widehat{FBC} &= \frac{\widehat{FC}}{2} \\ \widehat{C} &= 2\widehat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{FC},$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{CDK} &= \frac{\widehat{BF} + \widehat{CK}}{2} \\ \widehat{DKE} &= \frac{\widehat{FC} + \widehat{CK}}{2} \\ \widehat{BF} &= \widehat{FC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{EDK} = \widehat{DKE} \Rightarrow ED = EK. \quad (4)$$

از طرفی طبق قوت نقطه E نسبت به دو دایره w_1 و w_2 می دانیم:

$$\left. \begin{aligned} EK^2 &= EC \cdot EB \\ EA^2 &= EC \cdot EB \end{aligned} \right\} \Rightarrow EK = EA. \quad (5)$$

و ترکیب (۴) و (۵) نتیجه می دهد که:

$$ED = EA \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{DAE}.$$

حال اگر AD را امتداد دهیم تا دایره w_1 را در N قطع کند، در دایره w_1 داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{DAE} &= \frac{\widehat{AC} + \widehat{CN}}{2} \\ \widehat{ADE} &= \frac{\widehat{AC} + \widehat{BN}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{CN} = \widehat{BN}.$$

و N وسط کمان BC (یعنی همان M) است.

حال طبق قوت D در دو دایره داریم:

$$FD \cdot DK = BD \cdot DC = MD \cdot DA,$$

پس $FD \cdot DK = MD \cdot DA$ در نتیجه چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

راه حل دوم. اگر قوت نقطه E را نسبت به دو دایره w_1 و w_2 بنویسیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} EC \cdot EB &= EA^2 \\ EC \cdot EB &= EK^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow EA = EK.$$

حال ثابت می کنیم که نیمساز زاویه $\widehat{BAC}$ و نیمساز زاویه $\widehat{BKC}$ روی ضلع BC هم دیگر را قطع می کنند. برای این منظور کافی است اثبات کنیم که $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$.

دو مثلث EKB و EKC با هم متشابه اند، پس $\frac{KB}{KC} = \frac{EB}{EC}$. همچنین دو مثلث EBA و EAC نیز متشابه اند و داریم: $\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EA}$.

و چون می دانیم $EK = EA$ پس $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$. حال اگر محل برخورد این نیمسازها با ضلع BC را D بنامیم، F و M وسط کمان BC از دو دایره هستند، پس K و D و F هم خطند و A و D و M نیز هم خطند.

قوت D را در دو دایره می نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} BD \cdot DC &= AD \cdot DM \\ BD \cdot DC &= FD \cdot DK \end{aligned} \right\} \Rightarrow AD \cdot DM = FD \cdot DK,$$

پس چهارضلعی $AFMK$ محاطی است.

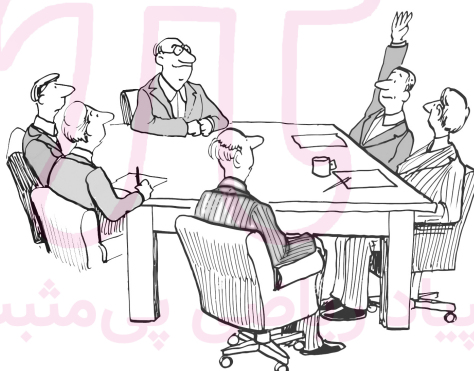
المپیاد ریاضی پی مثبت

@pi_mosbat_math

۳. فرض کنید شورایی شش نفر عضو دارد و تصمیمات در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضا گرفته می شود. یک «روش قابل قبول تصمیم گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجه نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجه نهایی باید باز هم مثبت باشد.
- شرط تقارن: اگر همه اعضا نظر خود را تغییر دهند، نتیجه نهایی نیز باید تغییر کند.

یک نوع روش قابل قبول تصمیم گیری، «رأی گیری وزن دار» است. به این ترتیب که به اعضا وزن های نامنفی $w_1, w_2, \dots, w_6$ تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسه مجموع وزن رأی دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر $w_1 = 2$ و برای هر $i \geq 2, w_i = 1$ ، تصمیم گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود. یک روش قابل قبول تصمیم گیری مثال بزنید که به شکل رأی گیری وزن دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.



راه حل. اعضای شورا را با شماره های ۱ تا ۶، شماره گذاری می کنیم. روش زیر برای تصمیم گیری را در نظر بگیرید:

اگر نفرات اول تا سوم هم رأی بودند، رأی آنها را به عنوان نتیجه نهایی در نظر می گیریم و در غیر این صورت نتیجه نهایی بر اساس اکثریت آراء نفرات چهارم تا ششم تعیین می شود.

این روش تصمیم گیری به وضوح دارای دو شرط صعودی بودن و تقارن است و بنابراین یک روش قابل قبول است. ادعا می کنیم که به هیچ صورتی نمی توان به اعضا وزن داد، به طوری که این روش از مقایسه وزن اعضای موافق و مخالف حاصل شود.

با برهان خلف فرض می کنیم چنین نباشد و وزن دهی $(w_1, \dots, w_6)$ یک وزن دهی برای این روش باشد. (یعنی وزن نفر اول، w_1 وزن نفر دوم، w_2 و به همین ترتیب وزن نفر i -ام، w_i است) با توجه به یکسان بودن نقش سه عضو اول با یکدیگر و همچنین سه عضو آخر با هم در این روش،

$$(w_2, w_3, w_1, w_5, w_6, w_4)$$

و همین طور

$$(w_3, w_1, w_2, w_6, w_4, w_5)$$

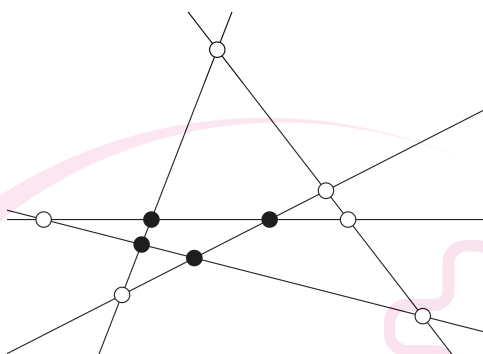
وزن دهی های دیگری برای این روش هستند. به سادگی می توان دید که اگر چند وزن دهی به یک روش تصمیم گیری منجر شوند، جمع آنها هم همان روش تصمیم گیری را به ما می دهد. پس جمع سه وزن دهی ذکر شده یک وزن دهی برای روش تصمیم گیری پیشنهادی ماست، یعنی اگر قرار دهیم $a = w_1 + w_2 + w_3$ و $b = w_4 + w_5 + w_6$ یک وزن دهی برای این روش است.

حال ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که سه نفر اول موافق و سه نفر دوم مخالف باشند. در این صورت در روش ما نتیجه نهایی موافق است و بنابر وزن دهی ادعا شده، $3a > 3b$. حالت دیگری را هم می توان در نظر گرفت که دو نفر از سه نفر اول و یک نفر از سه نفر آخر موافق و بقیه مخالف باشند. در این حالت، تصمیم نهایی مخالف است و جمع وزن موافقان $2a + b$ و وزن مخالفان $2b + a$ است. باز اگر وزن دهی ادعا شده همین نتیجه را بدهد، باید داشته باشیم $2a + b > 2b + a$ و در نتیجه $b > a$. این نابرابری با نابرابری قبلی متناقض است و در نتیجه فرض خلف ما به تناقض منجر می شود. پس روش تصمیم گیری ارائه شده وزن دار نیست.

تذکر. روش های تصمیم گیری قابل قبول دیگری نیز می توان ارائه کرد که وزن دار نباشند. ما در اینجا به دو نمونه دیگر اشاره می کنیم:

- اگر یک تصمیم (موافق یا مخالف)، بیشتر از سه رأی داشته باشد، به عنوان تصمیم نهایی انتخاب می شود و در صورت تساوی آراء موافق و مخالف، تصمیمی که تعداد موافقان آن در میان نفرات اول تا سوم، عددی فرد باشد، اتخاذ می شود.
- فرض کنید پنج نفر اول دور یک میز نشسته اند. در این صورت اگر سه نفر مجاور از آنها هم نظر بودند، نظر مشترک آنها و در غیر این صورت نظر نفر ششم اتخاذ می شود.

۴. در صفحه $n \geq 3$ خط دوجه دو متقاطع رسم شده است که هیچ سه‌تایی از آن‌ها هم‌رس نیستند. یک نقطه تقاطع دو تا از این خط‌ها را «درونی» می‌گوییم، هرگاه در هر دو طرف این نقطه روی هر دو خط گذرا از این نقطه، نقاط تقاطع دیگری وجود داشته باشد. (برای مثال، در شکل روبه‌رو ۵ خط با ۴ نقطه تقاطع درونی نشان داده شده است که با دایره‌های توپر مشخص شده‌اند).



نشان دهید دست‌کم به تعداد $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ تا از نقاط تقاطع این n خط، درونی هستند.

راه حل. گرافی در نظر بگیرید که رئوس آن نقاط تقاطع خطوط مسأله و یال‌های آن پاره‌خط‌هایی است که این خطوط روی یکدیگر جدا می‌کنند. (یعنی پاره‌خط‌هایی روی این خطوط که دو سر آن دو تقاطع است و درون آن تقاطعی وجود ندارد) این گراف را G می‌نامیم. هر دو تا از این n خط دقیقاً یک تقاطع دارند و در نتیجه تعداد رئوس گراف G برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ است. از طرف دیگر روی هر خط $n-1$ تقاطع وجود دارد و در نتیجه پاره‌خط‌های مابین آن‌ها $n-2$ یال از گراف G به ما می‌دهد. پس تعداد یال‌های گراف هم برابر $n(n-2)$ است.

با توجه به اینکه تعداد خطوط حداقل سه تا است، درجات رئوس G ، ۲، ۳ یا ۴ است که تعداد رئوس با هر یک از این درجات را به ترتیب با a ، b و c نشان می‌دهیم. رئوس با بیشترین درجه همان نقاط تقاطع درونی هستند. حال توجه کنید که با داشتن تعداد کل رئوس گراف G و اینکه جمع درجات رئوس در هر گراف دو برابر تعداد یال‌های آن است، دو رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a + b + c = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$2a + 3b + 4c = 2n(n-2).$$

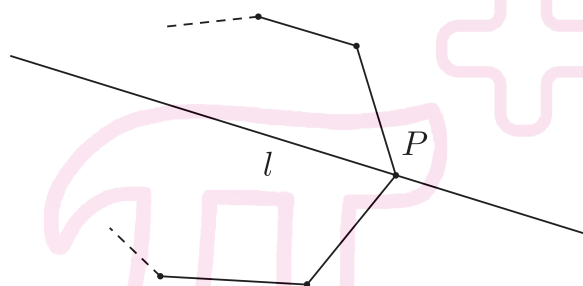
اگر ۳ برابر تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$c - a = \frac{n^2 - 5n}{2} \implies c = (a - 3) + \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

پس حکم معادل با این است که در گراف G حداقل ۳ رأس با درجه ۲ داریم. برای اثبات این گزاره هم از لم زیر استفاده می‌کنیم که شهوداً واضح است و اثباتش در پایان می‌آید:

لم. برای هر تعداد نقطه دلخواه در صفحه که هم خط نباشند، یک چندضلعی محدب وجود دارد که همه این نقاط درون و یا روی اضلاع آن قرار می گیرند و رؤس آن از میان این نقاط باشند.

حال اگر لم را برای نقاط تقاطع خطوط مسأله استفاده کنیم، نتیجه می شود که یک $k \geq 3$ -ضلعی محدب وجود دارد که رؤس آن از میان تقاطع هاست و بقیه تقاطع ها درون و یا روی اضلاع آن قرار دارند. به راحتی می توان دید که درجه همه رؤس این چندضلعی در گراف G برابر ۲ است. زیرا اگر l یکی از دو خط گذرا از رأس P در این چندضلعی باشد، همه تقاطع های روی آن در درون چندضلعی و در نتیجه در یک طرف P قرار دارند. پس P فقط یک رأس مجاور روی این خط دارد و با در نظر گرفتن خط دیگر گذرا از P ، نتیجه می شود که درجه P در گراف برابر ۲ است.



پس $3 \leq k \leq a$ و اثبات کامل می شود.

اثبات لم. یک خط در نظر بگیرید که همه نقاط در یک طرف آن باشند و با هیچ یک از خطوط واصل دو تا از نقاط داده شده موازی نباشد. حال این خط را به موازات خود به سمتی که نقاط قرار دارند حرکت دهید تا به اولین نقطه برسید. با توجه به فرضی که در مورد راستای خط کردیم، در این لحظه فقط یک نقطه روی خط قرار دارد که آن را P_1 می نامیم. حال خطمان را در جهت ساعت گرد حول P_1 می چرخانیم تا به اولین نقطه دیگر برخورد کند. دورترین نقطه روی خط از P_1 در این وضعیت را P_2 می نامیم. حال خط را حول P_2 در جهت ساعت گرد بچرخانید تا به اولین نقطه جدید برخورد کنید و به همین ترتیب دنباله نقاط $P_3, P_4, \dots$ را بسازید. با توجه به متناهی بودن کل نقاط، جایی در این دنباله با دور مواجه می شویم و نقاط این دور و پاره خط های بین نقاط متوالی، چندضلعی محدب خواسته شده را به ما می دهد. (خیلی راحت می توان نشان داد که این دور کامل است، گرچه به این مطلب برای اثبات لم احتیاج نداریم. ضمناً چندضلعی محدب با شرایط لم یکتاست و به آن «پوش محدب» مجموعه مورد نظر از نقاط می گویند.)

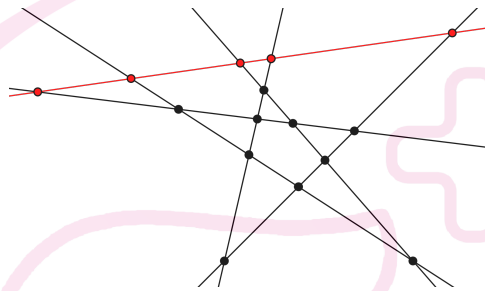
تذکر. با توجه به رابطه

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{(n-3)(n-4)}{2} + n-3,$$

تلاش برای اثبات گزاره زیر، یک ایده برای اثبات حکم مسأله با استفاده از استقراء است:

اضافه کردن یک خط جدید به یک مجموعه از $n - 1$ خط در صفحه، (که همگی دوبه دو متقاطع باشند و هیچ سه تایی همرس نباشند) حداقل $n - 3$ نقطه به نقاط تقاطع درونی اضافه می کند.

اما متأسفانه (!) این گزاره غلط است و شکل زیر یک مثال نقض برای آن در حالت $n = 6$ ارائه می کند: (خط قرمز، خط جدید است)

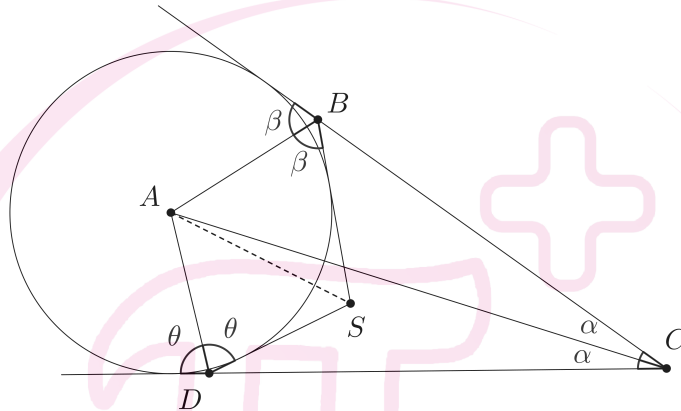


تعداد تقاطع های درونی قبل از اضافه کردن خط جدید، ۵ تا و بعد از اضافه کردن ۷ تا است و در نتیجه کمتر از $n - 3 = 3$ تا زیاد می شود.

المپیاد ریاضی پی مثبت

@pi_mosbat_math

۵. چهارضلعی $ABCD$ و نقطه T داخل آن طوری انتخاب شده اند که AC نیمساز زاویه $\angle BCD$ است، $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$ و همچنین $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$. ثابت کنید: $\angle BAT = \angle DAC$.
- راه حل اول. رأس A روی نیمساز زاویه $\widehat{C}$ قرار دارد و از دو خط CB و CD به یک فاصله است. بنابراین می توان دایره ای به مرکز A رسم کرد که بر دو خط CB و CD مماس باشد. خطوط مماس بر دایره که از B و D رسم می شوند در S متقاطع اند.



$$\begin{aligned}\widehat{BSD} &= \widehat{BCD} + \widehat{CBS} + \widehat{CDS} = 2\alpha + 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\theta = 2(180^\circ + \alpha - \beta - \theta) \\ \Rightarrow \widehat{BSA} &= \widehat{DSA} = 180^\circ + \alpha - \beta - \theta \\ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ABC} - \widehat{ASD} &= (180^\circ - \beta) - (180^\circ + \alpha - \beta - \theta) = \theta - \alpha = \widehat{DAC} \\ \widehat{ADC} - \widehat{ASB} &= (180^\circ - \theta) - (180^\circ + \alpha - \beta - \theta) = \beta - \alpha = \widehat{BAC} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ASD} &= \widehat{ATD} \\ \widehat{ASB} &= \widehat{ATB} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

با توجه به تعریف نقطه T و یکتا بودن آن نتیجه می گیریم، نقطه S بر T منطبق است و در نتیجه:

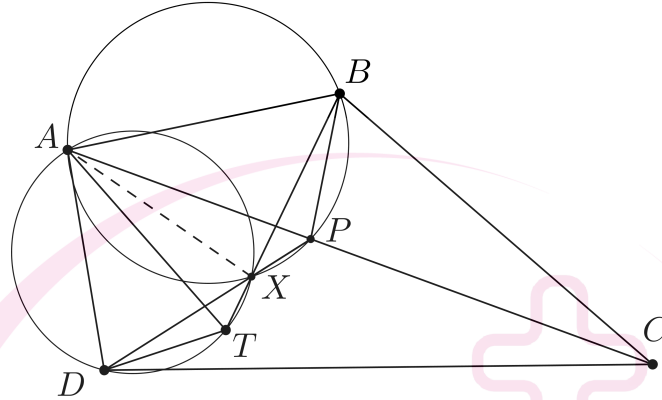
$$\widehat{BAS} = 180^\circ - \widehat{ABS} - \widehat{ASB} = 180^\circ - \beta - (180^\circ + \alpha - \beta - \theta) = \theta - \alpha = \widehat{DAC}.$$

اگر نقاط S و T بر هم منطبق نباشند، با توجه به رابطه (۶) چهارضلعی های $ADST$ و $ABST$ محاطی اند، پس $BADS$ محاطی است و داریم:

$$\begin{aligned}\beta + \theta &= 180^\circ \Rightarrow \widehat{BSA} = \widehat{DSA} = 180^\circ + \alpha - \beta - \theta = \alpha \\ \Rightarrow \widehat{BSD} &= \widehat{BSA} + \widehat{DSA} = 2\alpha \\ \Rightarrow \widehat{BTD} &= \widehat{BSD} = 2\alpha = \widehat{BCD},\end{aligned}$$

اما طبق فرض مسأله نقطه T داخل چهارضلعی $ABCD$ قرار دارد و $\widehat{BTD} > \widehat{BCD}$. بنابراین T و S منطبق اند.

راه حل دوم.



$$\begin{aligned}\widehat{BCA} = \widehat{DCA} &\implies \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = \widehat{ADC} + \widehat{DAC} \\ &\implies \widehat{ABC} - \widehat{DAC} = \widehat{ADC} - \widehat{BAC} \\ &\implies \widehat{ATD} = \widehat{ATB} = \alpha.\end{aligned}$$

نقطه P را بر قطر AC در نظر می گیریم به طوری که $\widehat{PBC} = \widehat{DAC}$. داریم:

$$\begin{aligned}\widehat{ABP} &= \widehat{ABC} - \widehat{PBC} = \widehat{ABC} - \widehat{DAC} = \alpha, \\ \triangle BPC \sim \triangle ADC &\implies \frac{BC}{AC} = \frac{PC}{DC} \implies \left. \begin{aligned} \frac{BC}{PC} &= \frac{AC}{DC} \\ \widehat{BCA} &= \widehat{DCA} \end{aligned} \right\} \implies \triangle DPC \sim \triangle ABC, \\ &\implies \widehat{PDC} = \widehat{BAC} \\ &\implies \widehat{ADP} = \widehat{ADC} - \widehat{PDC} = \widehat{ADC} - \widehat{BAC} = \alpha.\end{aligned}$$

نقطه تقاطع DP و BT را X می نامیم.

$$\begin{aligned}\widehat{ADX} = \widehat{ATX} = \alpha &\implies \text{محايطی است. } ADTX \\ \widehat{AXD} = \widehat{ATD} = \widehat{ABP} = \alpha &\implies \text{محايطی است. } ABPX\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\widehat{BAP} = \widehat{BXP} = \widehat{DXT} = \widehat{DAT} \implies \widehat{BAT} = \widehat{DAC}.$$

۶. همه توابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق می کنند:

• به ازای هر دو عدد طبیعی x و y مقدار $f(x) + f(y)$ بر $x + y$ بخش پذیر است.

• برای هر عدد طبیعی $x \geq 1395$ نابرابری $2f(x) \leq x^3$ برقرار است.

راه حل. ابتدا توجه کنید که با قرار دادن $x = y$ در شرط اول، نتیجه می شود که $f(x)$ بر x بخش پذیر است و در نتیجه می توانیم بنویسیم، $f(x) = xg(x)$ که $g(x)$ عددی طبیعی است. حال فرض کنیم $g(1) = a$ و $g(2) = b$. نشان می دهیم اگر x یک عدد فرد به اندازه کافی بزرگ باشد، $g(x)$ برابر a است. برای این کار دو بار از شرط اول برای $y = 1$ و $y = 2$ استفاده می کنیم:

$$x + 1 \mid xg(x) + a = (x + 1)g(x) + (a - g(x)) \implies x + 1 \mid g(x) - a,$$

$$x + 2 \mid xg(x) + 2b = (x + 2)g(x) + 2(b - g(x)) \implies x + 2 \mid g(x) - b.$$

(نتیجه گیری آخر به این علت است که $x + 2$ فرد است) در نتیجه با توجه به نسبت به هم اول بودن $x + 1$ و $x + 2$ باقیمانده $g(x)$ بر $(x + 1)(x + 2)$ با دانستن باقیمانده اش بر $x + 1$ و $x + 2$ به صورت یکتا به دست می آید. $a(x + 2) - b(x + 1)$ در دو بخش پذیری بالا به جای $g(x)$ صدق می کند، پس داریم:

$$g(x) = a(x + 2) - b(x + 1) + c(x + 1)(x + 2) = cx^2 + (3c + a - b)x + (2c + 2a - b).$$

که c عددی صحیح است. با توجه به فرض مسأله برای x های به اندازه کافی بزرگ $\frac{x^2}{4} < g(x) \leq \frac{x^2}{4}$ ، پس c نامنفی و حداکثر $\frac{1}{4}$ است و چون صحیح است، $c = 0$. پس داریم:

$$g(x) = (a - b)x + (2a - b).$$

لم. اگر X و Y نسبت به هم اول باشند، $X + Y \mid g(X) - g(Y)$.

اثبات لم. بنابر فرض مسأله $Xg(X) + Yg(Y)$ بر $X + Y$ بخش پذیر است. پس اگر $(X + Y)g(Y)$ را هم از آن کم کنیم، باز چنین است. پس $X(g(X) - g(Y))$ بر $X + Y$ بخش پذیر است. اما X و $X + Y$ نسبت به هم اولند، پس $g(X) - g(Y)$ بر $X + Y$ بخش پذیر است.

حال در ادامه حل مسأله فرض کنیم x' عدد فرد به اندازه کافی بزرگ دیگری باشد که نسبت به x اول است، در این صورت با توجه به لم:

$$x + x' \mid (a - b)(x - x'),$$

اما بزرگترین مقسوم علیه مشترک $x + x'$ و $x - x'$ برابر ۲ است، پس $\frac{x+x'}{2} | (a-b)$. حال اگر x' را از دو برابر قدر مطلق $a-b$ بزرگتر بگیریم، نتیجه می شود $a-b=0$ و در نتیجه برای x های فرد بزرگ $g(x) = 2a - b = a$ و ادعای ما ثابت می شود.

حال فرض کنید y یک عدد طبیعی دلخواه باشد. اگر x را یک عدد طبیعی به اندازه کافی بزرگ بگیریم که نسبت به $2y$ اول باشد، بنابراین:

$$x+y | g(x) - g(y) = a - g(y).$$

پس $a - g(y)$ بر تمامی $x+y$ هایی که x خاصیت گفته شده را داشته باشد، بخش پذیر است. اما اگر $a - g(y)$ صفر نباشد، x نمی تواند از حدی بزرگتر باشد. پس نتیجه می گیریم که برای هر y ، $g(y) = a$ و $f(y) = ay$.

در نهایت با توجه به شرط دوم، $2a \leq 1395^2$ ، تمامی توابعی که در دو شرط مسأله صدق می کنند به صورت $f(x) = ax$ هستند که a عددی طبیعی کوچکتر از $\frac{1395^2}{2}$ است.

المپیاد ریاضی پی مثبت

@pi_mosbat_math