

مسئله‌های مرحله‌ی دوم المپیاد ریاضی ۱۳۹۵

روز یکم، ۱۹ اردیبهشت ۱۳۹۵

۱. فرض کنید $0 < a \leq b \leq c$ ، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^2}{6c} \leq \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

۲. مثلث ABC با دایره محیطی w_1 مفروض است و داریم $\angle C = 2\angle B$. در نقطه A مماسی بر دایره w_1 رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطه E قطع کند. دایره w_2 را طوری رسم می‌کنیم که در نقطه C بر ضلع AC مماس باشد و همچنین از نقطه B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطه F قطع می‌کند. از نقطه E مماس EK را بر دایره w_2 رسم می‌کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایره w_1 (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

۳. فرض کنید شورایی شش عضو دارد و تصمیم‌ها در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضا گرفته می‌شود. یک «روش قابل قبول تصمیم‌گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجه نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجه نهایی باید باز هم مثبت باشد.

- شرط تقارن: اگر همه اعضا نظر خود را تغییر دهند، نتیجه نهایی نیز باید تغییر کند.

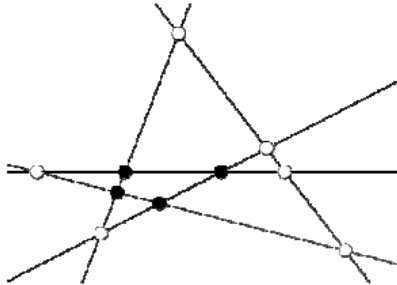


یک نوع روش قابل قبول تصمیم‌گیری، «رأی‌گیری وزن‌دار» است. به این ترتیب که به اعضا وزن‌های نامنفی $w_1, w_2, \dots$ و w_n تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسه مجموع وزن رأی‌دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر $w_1 = 2$ و برای هر $w_i = 1, i \geq 2$ ، تصمیم‌گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود.

یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری مثال بزنید که به شکل رأی‌گیری وزن‌دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.

روز دوم، ۱۰ اردیبهشت ۱۳۹۵

۴. در صفحه $n \geq 3$ خط دوه‌دو متقاطع رسم شده است که هیچ سه تایی از آن‌ها هم‌رس نیستند. یک نقطه تقاطع دو تا از این خط‌ها را «درونی» می‌گوییم، هرگاه در هر دو طرف این نقطه روی هر دو خط گذرا از این نقطه، نقاط تقاطع دیگری وجود داشته باشد. (برای مثال، در شکل روبه‌رو ۵ خط با ۴ نقطه تقاطع درونی نشان داده شده است که با دوایر توپر مشخص شده‌اند).



نشان دهید دست‌کم به تعداد $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ تا از نقاط تقاطع این n خط، درونی هستند.

۵. چهارضلعی $ABCD$ و نقطه T داخل آن طوری انتخاب شده‌اند که AC نیم‌ساز زاویه $\angle BCD$ است، $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$ و همچنین $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$. ثابت کنید: $\angle BAT = \angle DAC$.

۶. همهٔ توابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق می‌کنند:

- به ازای هر دو عدد طبیعی x و y ، مقدار $f(x) + f(y)$ بر $x + y$ بخش‌پذیر است.
- برای هر عدد طبیعی $x \geq 1395$ ، نابرابری $2f(x) \leq x^2$ برقرار است.

@pi_mosbat_math