

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و سومین دوره^۴ المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

آزمون مرحله دوم سی و سومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۷ و ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۴ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند. دفترچه^۵ پیش‌رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه حل آن‌هاست. لازم به ذکر است که سؤالات راه‌حل‌های دیگری هم دارند که در این دفترچه ذکر نشده‌اند. طبیعی است که هر راه حل صحیحی برای سؤالات آزمون از شرکت‌کنندگان پذیرفته می‌شود اگرچه در این دفترچه نیامده باشد. با توجه به جنبه آموزشی این راه حل‌ها ممکن است توضیحاتی در راه حل‌ها آمده باشد که از نظر بارم‌بندی تصحیح ضروری نباشد و همچنین ممکن است بعضی توضیحاتی که بر اساس بارم‌بندی تصحیح ضروری است به دلیل واضح بودن در این راه حل‌ها نیامده باشند.

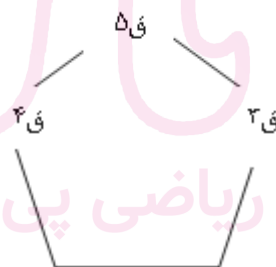
۱. فرض کنید آرش و بهرام کیکی به شکل دایره را با چند برش نامنظم از وسط، به قطعاتی نابرابر تقسیم کرده اند. در ابتدا آرش می تواند یکی از قطعات را به دل خواه بردارد. سپس بهرام فقط حق دارد یکی از دو قطعه ای را بردارد که قطعه مجاورش برداشته شده باشد و به همین ترتیب، هر کس در نوبت خود فقط حق دارد قطعه ای را بردارد که در یکی از مراحل قبلی قطعه مجاورش برداشته شده باشد. ثابت کنید اگر در ابتدا کیک به هر شکل پنج قطعه شده باشد، آرش، با دانستن وزن قطعات، می تواند طوری عمل کند که دست کم نصف کیک به او برسد.

راه حل.

قطعات را از سبک به سنگین، ق ۱ تا ق ۵ می نامیم. واضح است که اگر آرش (ق ۵ و ق ۳) یا (ق ۵ و ق ۴) را به دست آورد، به نیمی از کیک رسیده است زیرا بهرام دو قطعه را دارد که هر کدام از یکی از این دو قطعه سبک تر است.

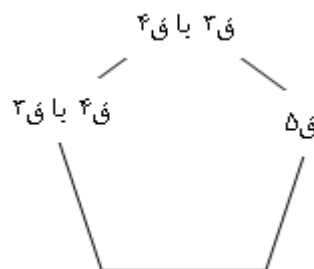
اکنون با توجه به موقعیت سه قطعه سنگین تر نسبت به هم، مسأله را در چهار حالت مختلف حل می کنیم:

حالت اول. ق ۳، ق ۴ و ق ۵ کنار هم باشند و ق ۵ وسطی باشد. در این صورت کافی است آرش ق ۵ را بردارد زیرا او در مرحله بعد می تواند یکی از ق ۳ یا ق ۴ را بردارد.



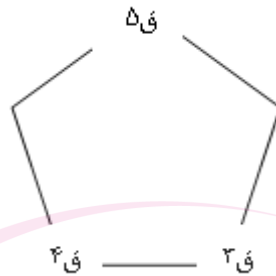
شکل ۱: حالت اول

حالت دوم. ق ۳، ق ۴ و ق ۵ در کنار هم باشند و ق ۵ وسط نباشد. در این حالت هم اگر آرش ق ۵ را بردارد، با هر انتخابی که بهرام انجام دهد آرش در مرحله بعد می تواند یکی از ق ۴ یا ق ۳ را بردارد.



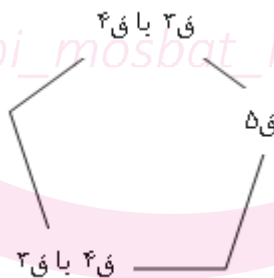
شکل ۲: حالت دوم

حالت سوم. ق ۳، ق ۴ هیچ کدام مجاور ق ۵ نباشند. در این حالت هم اگر آرش ق ۵ را بردارد، با هر انتخابی که بهرام انجام دهد آرش در مرحله بعد می تواند یکی از ق ۴ یا ق ۳ را بردارد.



شکل ۳: حالت سوم

حالت چهارم. یکی از ق ۳ یا ق ۴ مجاور ق ۵ باشد و دیگری مجاور این دو نباشد. در این صورت روش آرش بستگی به این دارد که آیا جمع ق ۳ و ق ۴ کمتر از نصف است یا نه. اگر کمتر بود، ق ۵ را برمی دارد و در ادامه در به ترین حالت بهرام به ق ۳ و ق ۴ می رسد. در غیر این صورت (یعنی حالتی که جمع ق ۳ و ق ۴ دست کم نصف یک است). در این صورت آرش باید از بین ق ۳ و ق ۴ آنی که مجاور ق ۵ نیست را بردارد. هر قطعه ای که بهرام در نوبت بعد بردارد، آرش یا به ق ۵ یا به قطعه باقی مانده از بین ق ۳ و ق ۴ دست رسی خواهد یافت و لذا از بین ق ۳، ق ۴ و ق ۵ دو تایش به آرش می رسد که طبق فرض این قسمت از نصف کمتر نیست.



شکل ۴: حالت چهارم

۲. کامپیوتری داریم که می تواند در حافظه خود عبارات جبری را ذخیره کند. حافظه کامپیوتر نامحدود است و در ابتدا فقط عبارت x در حافظه آن ذخیره شده است. با این کامپیوتر می توان اعمال زیر را انجام داد:

- هرگاه عبارت جبری f در حافظه کامپیوتر باشد، می توان $\frac{1}{f}$ را نیز در حافظه اش ذخیره کرد (به شرط این که f متحد با صفر نباشد).

- هرگاه عبارت های جبری f و g در حافظه کامپیوتر باشند، می توان $f + g$ و $f - g$ را نیز در حافظه اش ذخیره کرد. (f و g می توانند یکسان باشند).

به عنوان مثال می توان این عبارات را در حافظه ذخیره کرد: $\frac{1}{x}$ ، $x - \frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{x - \frac{1}{x}}$ و ... همه اعداد طبیعی n را بیابید که بتوان عبارت x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. (دو عبارت جبری با متغیر x را متحد می گوئیم اگر برای هر مقدار x که در دامنه هر دو باشد، برابر باشند).

راه حل.

ثابت می کنیم جواب مسأله، اعداد طبیعی فرد است. اولاً توجه کنید که هر عبارتی که بتوان در حافظه ذخیره کرد، تابعی فرد است زیرا عبارت x که در ابتدا در حافظه کامپیوتر است تابعی فرد است و نیز اگر f و g توابعی فرد باشند، $\frac{1}{f}$ ، $f + g$ و $f - g$ نیز توابعی فرد هستند.

پس برای n های زوج، نمی توان x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. اکنون نشان می دهیم برای n فرد، می توان عبارتی متحد با x^n را در حافظه ذخیره کرد.

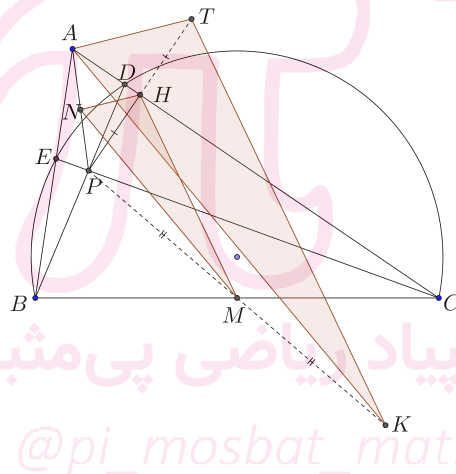
این ادعا را با استقرا روی n ثابت می کنیم. فرض کنید $n = 2k + 1$. پایه استقرا برای $k = 0$ واضح است. اکنون فرض کنید توانسته ایم عبارات x ، x^3 ، x^5 ، ...، x^{2k-1} (یا عبارتهایی متحد با آنها) را در حافظه ذخیره کنیم. بنابراین می توانیم $x^{2k-1} + x^{2k-3}$ و نیز $\frac{1}{x^{2k-1}}$ را نیز در حافظه ذخیره کنیم. حال به ترتیب عبارات زیر را در حافظه ذخیره می کنیم:

$$\begin{aligned} x^{2k-1} + x^{2k-3} &\Rightarrow \frac{1}{x^{2k-1} + x^{2k-3}} \Rightarrow \frac{1}{x^{2k-1}} - \frac{1}{x^{2k-1} + x^{2k-3}} \equiv \frac{1}{x^{2k+1} + x^{2k-1}} \\ &\Rightarrow x^{2k+1} + x^{2k-1} \Rightarrow x^{2k+1} \end{aligned}$$

پس توانستیم x^{2k+1} را نیز در حافظه ذخیره کنیم و حکم استقرا ثابت شد.

۳. دایره دلخواهی که از رئوس B و C مثلث ABC می گذرد، اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع می کند. اگر محل تقاطع BD و CE باشد و H پای عمود رسم شده از P بر AC باشد و M و N به ترتیب وسط های BC و AP باشند، ثابت کنید مثلث های MNH و CAE متشابه اند.
راه حل.

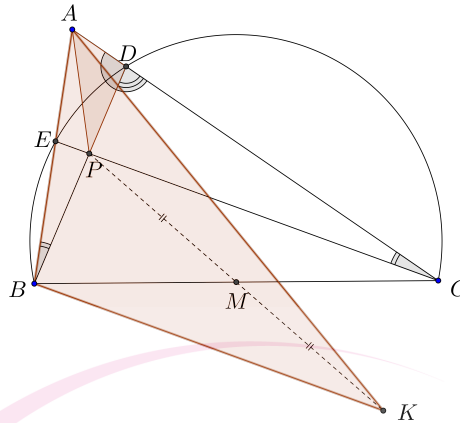
قرینه ی نقطه ی P نسبت به H و M را به ترتیب T و K می نامیم. در این صورت ادعا می کنیم مثلث های MNH و KAT هم نهشت هستند. برای این ادعا توجه کنید که $PH = HT$, $PN = NA$ و $PM = MK$ است. پس طبق قضیه ی تالس اضلاع این دو مثلث با هم موازی هستند و بنابراین ادعا ثابت شده است. از طرف دیگر با توجه به $\angle EBD = \angle ECD$ و برابری زاویه ی $\angle BAC$ در دو مثلث ABD و ACE این دو مثلث متشابه هستند. بنابراین برای اثبات حکم مسئله کافی است ثابت کنیم که دو مثلث AKT و ABD متشابه هستند. یعنی کافی است ثابت کنیم که $\angle BAD = \angle KAT$ و هم چنین $\frac{AB}{AD} = \frac{AK}{AT}$



دقت کنید که این احکام معادل متشابه بودن مثلث های ABK و ADT است (چون $\angle BAD = \angle KAT$ اگر و تنها اگر $\angle BAK = \angle DAT$). اما با توجه به این که T از قرینه کردن P نسبت به ضلع AC به دست آمده بود، مثلث های ADT و ADP با هم هم نهشت هستند و بنابراین برای اثبات حکم باید نشان دهیم که دو مثلث ABK و ADP متشابه هستند. چون در چهارضلعی $BKCP$ قطرهای یک دیگر را نصف کرده اند، این چهارضلعی یک متوازی الاضلاع است و لذا $BK \parallel CE$. این نتیجه می دهد که

$$\angle ABK = \angle AEC = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - \angle BDC = \angle ADP$$

از سوی دیگر توجه کنید که مجدداً با توجه به این که $BKCP$ متوازی الاضلاع است، $BK = CP$. پس برای کامل شدن اثبات تشابه دو مثلث باید نشان دهیم $\frac{AD}{DP} = \frac{AB}{BK} = \frac{AB}{CP}$

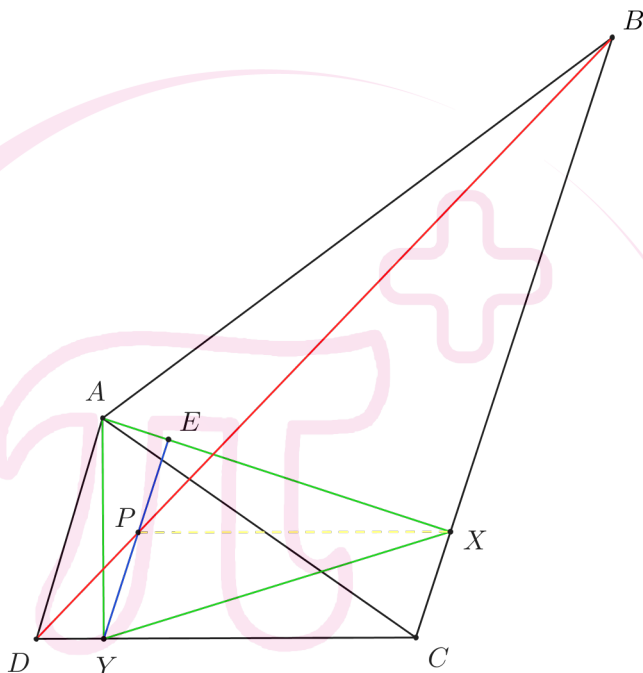


برای این هم طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث‌های ABD و PDC باید ثابت کنیم:

$$\frac{\sin(\angle ABD)}{\sin(\angle ADB)} = \frac{\sin(\angle DCP)}{\sin(\angle CDP)}$$

اما $\angle ABD = \angle DCP$ و $\angle ADB = 180^\circ - \angle CDP$ است، پس سینوس‌های این زوایا با هم برابر هستند و بنابراین تساوی مورد نظر ما برقرار هست و بنابراین اثبات حکم مسئله به پایان می‌رسد.

المپیاد ریاضی پی‌مثبت
@pi_mosbat_math



پای عمود وارد از Y بر AX را E می‌نامیم. اگر تقاطع YE با BD را P بنامیم برای اثبات حکم کافیت ثابت کنیم XP بر AY عمود است یا معادلاً XP موازی CD است. داریم:

$$YE||CB \Rightarrow \frac{DY}{YC} = \frac{DP}{PB}$$

$$ADC \sim ACB \Rightarrow \frac{DY}{YC} = \frac{CX}{XB}$$
$$\frac{DP}{PB} = \frac{CX}{XB}$$

بنابراین طبق عکس قضیه‌ی تالس XP با CD موازی است.

۵. محیط یک دایره را با $2n$ نقطه به $2n$ قسمت مساوی تقسیم کرده ایم. $n + 1$ بازه به طول های ۱، ۲، ...، $n + 1$ روی این دایره به نحوی قرار دارند که سر و ته آنها روی این نقاط است. نشان دهید یکی از این بازه ها کاملاً درون دیگری است.

راه حل.

فرض کنید حکم برقرار نباشد. در این صورت $n + 1$ بازه با شرایط مسأله وجود دارد که هیچ کدام داخل دیگری نیست. بازه به طول ۱ را در نظر بگیرید. با توجه به این که هیچ یک از بازه های دیگر شامل این بازه نیست، بقیه بازه ها با این بازه (مگر احتمالاً در نقاط انتهایی) اشتراک ندارند و اگر درون این بازه را از دایره حذف کنیم و کمان باقی مانده را صاف کنیم، چنین چیزی خواهیم داشت:

پاره خطی به طول $2n - 1$ که $2n$ نقطه با فاصله های واحد روی آن علامت زده شده است. همچنین n بازه با سر و ته این نقاط و به طول های ۲، ...، $n + 1$ که هیچ کدام شامل دیگری نیست.

حال بازه به طول $n + 1$ را در نظر بگیرید. از آن جایی که هیچ بازه دیگری کاملاً درون این بازه قرار ندارد و بقیه بازه ها از آن کوچکترند، هر کدام از این $n - 1$ بازه شامل یک نقطه در سمت چپ و یا یک نقطه در سمت راست بازه به طول $n + 1$ است و فقط یکی از این حالات اتفاق می افتد. حال سرهای (یعنی چپ ترین نقطه های) هر یک از بازه های دسته اول را در نظر بگیرید. این نقاط در سمت چپ بزرگترین بازه قرار دارند و متمایز هستند، چون اگر سر دو بازه یکی باشد، بازه بزرگتر بازه کوچکتر را می پوشاند. به همین ترتیب نقاط ته بازه های دسته دوم را در نظر بگیرید که در سمت راست بزرگترین بازه قرار دارند و متمایزند. پس در مجموع باید $n - 1$ نقطه متمایز (سرهای دسته اول و ته های دسته دوم) داشته باشیم که همگی از میان نقاط علامت زده شده و بیرون بزرگترین بازه هستند. اما بزرگترین بازه خود شامل $n + 2$ نقطه علامت زده شده است و $n - 2$ نقطه علامت زده شده بیرون آن قرار دارد، پس نمی توان $n - 1$ نقطه علامت زده شده بیرون آن انتخاب کرد. پس فرض خلف به تناقض می انجامد و حکم ثابت می شود.

۶. $n \geq 50$ عددی طبیعی است. نشان دهید می توان n را به صورت جمع دو عدد طبیعی نوشت عوامل اول هر کدام از آن دو عدد از $\sqrt{n}$ بزرگ تر نباشند. برای مثال، ۹۴ را می توان به صورت $80 + 14$ نوشت که هیچ یک از عوامل اول این دو عدد از $\sqrt{94}$ بزرگ تر نیستند.
راه حل.

از آن جا که در طول راه حل بارها از عبارت ((عوامل اول x از y بیش تر نیستند))، استفاده می کنیم، در همین ابتدا نماد $\sqsubseteq$ را برای نمایش این مفهوم قرارداد می کنیم. به این صورت که $x \sqsubseteq y$ یعنی همه عوامل اول x کم تر یا مساوی y هستند.
دو نکته ساده ما را در رسیدن به این نمایش برای عدد n کمک می کند.

• برای هر عدد طبیعی $x \leq m$ ، $x \sqsubseteq m$. (اگر r عامل اولی بزرگ تر از m داشته باشد، باید $r > m$).

• اگر $r \sqsubseteq m$ و $s \sqsubseteq m$ آن گاه $rs \sqsubseteq m$. (هر عامل اول rs عاملی از r یا s است).

به طور خاص این نکته ها نتیجه می دهند که اگر بتوان عدد r را به صورت حاصل ضرب اعدادی کم تر یا مساوی m نوشت $r \sqsubseteq m$ ، برای مثال همواره $m^2 \sqsubseteq m$.

فرض کنید m^2 و $(m+1)^2$ دو مربع کامل متوالی باشند که $m^2 \leq n < (m+1)^2$ پس $n = m^2 + r$ که $0 \leq m \leq 2m$. دقت کنید که در این صورت $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = m$ و باید نشان دهید که n را می توان به صورت $a + b$ نوشت که $a \sqsubseteq m$ و $b \sqsubseteq m$.

مسئله را بر حسب زوج یا فرد بودن m به دو حالت تقسیم می کنیم. (توجه کنید که چون $n \geq 50$ فرض شده است، $m \geq 7$ خواهد بود).

اگر m فرد باشد، $m+1$ زوج است. حال $m+1$ عدد متوالی زیر را در نظر بگیرید:

$$n - (m+1), n - m, \dots, n - 2, n - 1$$

از بین این $m+1$ عدد متوالی یکی از آن ها مثلاً $n - j = m^2 + r - j$ بر $m+1$ بخش پذیر است. ادعا می کنیم که در این صورت

$$n = \underbrace{(n-j)}_a + \underbrace{j}_b$$

نمایش مطلوب برای n را به دست می دهد. توجه کنید که برای هر $1 \leq j \leq m+1$ ، داریم $j \sqsubseteq m$ ، زیرا اگر $j \leq m$ باشد، با توجه به نکته بالا این موضوع واضح است و اگر $j = m+1$ ، آن گاه $m+1 = 2 \cdot \frac{m+1}{2}$ و چون $2 \leq m$ و $\frac{m+1}{2} \leq m$ ، مجدداً طبق نکته های بالا $m+1 \sqsubseteq m$. پس در هر صورت $j \sqsubseteq m$. از طرف دیگر با توجه به نحوه تعریف m ، $n - j < (m+1)^2$ و در نتیجه $\frac{n-j}{m+1} < m+1$ پس $\frac{n-j}{m+1} \sqsubseteq m$ و این یعنی می توان نوشت:

$$n = \underbrace{(m+1) \left(\frac{n-j}{m+1} \right)}_a + \underbrace{j}_b$$

که چون $m+1 \subseteq m$ و $\frac{n-j}{m+1} \subseteq m$ نتیجه می گیریم که $a \subseteq m$ و بنابراین کار تمام است. در حالتی که m زوج باشد، شبیه به حالت قبل این بار $m+2$ زوج خواهد بود. در این حالت $m+2$ عدد متوالی زیر را در نظر می گیریم:

$$n-m, n-(m-1), \dots, n-1, n, n+1$$

از بین این $n+2$ عدد متوالی حتماً یکی از آن ها بر $m+2$ بخش پذیر است.

• اگر $1 \leq j \leq m$ یافت شود که $m+2 \mid n-j$ مشابه حالت قبل $\frac{n-j}{m+2} \leq m$ و لذا $\frac{n-j}{m+2} \subseteq m$ از طرف دیگر $m+2 = 2(\frac{m+2}{2})$ که $\frac{m+2}{2} \leq m$ پس $m+2 \subseteq m$. بنابراین در کل $a = n-j$ و $b = j$ نمایش مطلوب ما خواهد بود.

• اگر خود n بر $m+2$ بخش پذیر باشد، چون $m+2$ زوج است می توان نوشت:

$$n = 2\left(\frac{m+2}{2}\right)\left(\frac{n}{m+2}\right) = \underbrace{\left(\frac{m+2}{2}\right)\left(\frac{n}{m+2}\right)}_a + \underbrace{\left(\frac{m+2}{2}\right)\left(\frac{n}{m+2}\right)}_b$$

• اگر $m+2 \mid n+1$ چون $m+2 \mid n+1 \leq (m+1)^2$ و $m^2+1 \leq n+1 \leq (m+1)^2$ $m^2+m-2 = (m-1)(m+2) = n+1$ و یا $n+1 = m(m+2)$ (مضرب های دیگر $m+2$ بزرگ تر از $(m+1)^2$ و یا کوچک تر از m^2 هستند). در حالت اول چون $m-3 < m$ و $a = m^2$ و $b = m-3$ همان نمایش مطلوب است. در حالت دوم $n = (m+1)^2 - 2$ پس می توان نوشت:

$$n = (m+1)^2 - 2 = (m+1)^2 - 9 + 7 = (m-2)(m+4) + 7 = \underbrace{2(m-2)\left(\frac{m+4}{2}\right)}_a + \underbrace{7}_b$$

حال چون $m \geq 7$ و $\frac{m+4}{2} \leq m$ و لذا $a \subseteq m$ و $b \subseteq m$ پس در این حالت هم نمایش مطلوب وجود دارد و بنابراین کار تمام است.

توضیح. توجه کنید که در طول راه حل از فرض $m \geq 7$ تنها در آخرین استدلال استفاده شد و در مابقی استدلال ها فرض $m \geq 4$ ($n \geq 16$) کفایت می کرد. با توجه به این نکته استدلال بالا حکم مسئله را برای همه اعداد طبیعی مگر اعداد به شکل $m^2 + 2m - 1$ که m عددی زوج و کم تر از ۷ است نتیجه می دهد. این چنین عددی برای $m = 6$ برابر ۴۷ است که می توان آن را به صورت $32 + 15$ نوشت. در مورد $m = 4$ هم به عدد ۲۳ برمی خوریم که می توان به سادگی دید که چنین نمایشی ندارد. در واقع حکم مسئله برای همه اعداد بزرگ تر از ۷ به جز ۲۳ درست است.