

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سوالات آزمون مرحله دوم سی و سومین دوره

المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

آزمون مرحله دوم سی و سومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۷ و ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۴ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند. در ادامه، سؤالات آزمون را می‌بینید.

المپیاد ریاضی پی‌مثبت

@pi_mosbat_math

۱. فرض کنید آرش و بهرام کیکی به شکل دایره را با چند برش نامنظم از وسط، به قطعاتی نابرابر تقسیم کرده اند. در ابتدا آرش می تواند یکی از قطعات را به دل خواه بردارد. سپس بهرام فقط حق دارد یکی از دو قطعه ای را بردارد که قطعه مجاورش برداشته شده باشد و به همین ترتیب، هر کس در نوبت خود فقط حق دارد قطعه ای را بردارد که در یکی از مراحل قبلی قطعه مجاورش برداشته شده باشد. ثابت کنید اگر در ابتدا کیک به هر شکل پنج قطعه شده باشد، آرش، با دانستن وزن قطعات، می تواند طوری عمل کند که دست کم نصف کیک به او برسد.

۲. کامپیوتری داریم که می تواند در حافظه خود عبارات جبری را ذخیره کند. حافظه کامپیوتر نامحدود است و در ابتدا فقط عبارت x در حافظه آن ذخیره شده است. با این کامپیوتر می توان اعمال زیر را انجام داد:

- هرگاه عبارت جبری f در حافظه کامپیوتر باشد، می توان $\frac{1}{f}$ را نیز در حافظه اش ذخیره کرد (به شرط این که f متحد با صفر نباشد).
- هرگاه عبارت های جبری f و g در حافظه کامپیوتر باشند، می توان $f + g$ و $f - g$ را نیز در حافظه اش ذخیره کرد. (f و g می توانند یکسان باشند).

به عنوان مثال می توان این عبارات را در حافظه ذخیره کرد: $\frac{1}{x}$ ، $x - \frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{x - \frac{1}{x}}$ ، $\frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}$ و ... همه اعداد طبیعی n را بیابید که بتوان عبارت x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. (دو عبارت جبری با متغیر x را متحد می گوئیم اگر برای هر مقدار x که در دامنه هر دو باشد، برابر باشند).

@pi_mosbat_math

۳. دایره دلخواهی که از رئوس B و C مثلث ABC می گذرد، اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع می کند. اگر محل تقاطع BD و CE باشد و H پای عمود رسم شده از P بر AC باشد و M و N به ترتیب وسط های BC و AP باشند، ثابت کنید مثلث های MNH و CAE متشابه اند.

۴. در چهارضلعی $ABCD$ ، AC نیمساز زاویه A است و $\angle ADC = \angle ACB$. X و Y به ترتیب، پای عمودهای رسم شده از A بر BC و CD هستند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث AXY روی خط BD است. (مرکز ارتفاعی یک مثلث، محل برخورد ارتفاع های آن است).

۵. محیط یک دایره را با $2n$ نقطه به $2n$ قسمت مساوی تقسیم کرده ایم. $n+1$ بازه به طول های ۱، ۲، ...، $n+1$ روی این دایره به نحوی قرار دارند که سر و ته آنها روی این نقاط است. نشان دهید یکی از این بازه ها کاملاً درون دیگری است.

۶. $n \geq 50$ عددی طبیعی است. نشان دهید می توان n را به صورت جمع دو عدد طبیعی نوشت که عوامل اول هر کدام از آن دو عدد از $\sqrt{n}$ بزرگ تر نباشند. برای مثال، ۹۴ را می توان به صورت $14 + 80$ نوشت که هیچ یک از عوامل اول این دو عدد از $\sqrt{94}$ بزرگ تر نیستند.

المپیاد ریاضی پی مثبت
@pi_mosbat_math