

سؤالات و پاسخ‌های تشریحی آزمون مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۳۹۳



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

معاونت دانش‌پژوهان جوان

به نام او

آزمون مرحله دوم سی و دومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۱ و ۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۳ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند.

دفترچهٔ پیش رو، شامل سوالات آزمون به همراه راه حل آن‌هاست. در تدوین راه حل‌ها جنبهٔ آموزشی این امر مد نظر قرار گرفته و برای بعضی سوالات بیش از یک راه حل ارائه شده است. لازم به ذکر است که سوالات راه حل‌های دیگری هم دارند که در این دفترچه ذکر نشده‌اند. طبیعی است که هر راه حل صحیحی برای سوالات آزمون از شرکت‌کنندگان پذیرفته می‌شود اگرچه در این دفترچه نیامده باشد.

با توجه به جنبهٔ آموزشی این راه حل‌ها ممکن است توضیحاتی در راه حل‌ها آمده باشد که از نظر بارم‌بندی تصحیح ضروری نباشد و همچنین ممکن است بعضی توضیحاتی که بر اساس بارم‌بندی تصحیح ضروری است به دلیل واضح بودن در این راه حل‌ها نیامده باشند.

۱. فروشگاهی مسئول پخش ۱۰۰ سبد کالا است. هر سبد باید شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ باشد. می‌دانیم که مجموعاً ۱۰۰۰ کیلوگرم برنج و ۳۰۰۰ عدد تخم‌مرغ در سبدها وجود دارد ولی در برخی سبدها مقدار این دو کالا کم‌تر یا بیش‌تر از مقدار یادشده است. کارمندان فروشگاه می‌توانند در هر مرحله دو سبد را انتخاب و هر مقدار دلخواه برنج و هر تعداد تخم‌مرغ آن دو سبد را جابه‌جا کنند. دست‌کم در چند مرحله می‌توان، با شروع از هر وضعیت اولیه‌ای، برنج و تخم‌مرغ همه سبدها را با هم برابر کرد؟

راه حل. پاسخ مسئله ۹۹ است. ابتدا وضعیت اولیه‌ای را در نظر بگیرید که در آن همه تخم‌مرغ‌ها در یک سبد باشند. در این صورت در هر مرحله حداکثر یک سبد جدید دارای تخم‌مرغ می‌شود. بنابراین حداقل ۹۹ مرحله لازم است تا همه سبدها دارای تخم‌مرغ شوند. اکنون ادعا می‌کنیم با هر وضعیت اولیه در ۹۹ مرحله می‌توان همه سبدها را درست کرد. (درست یعنی شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ) در هر مرحله، از بین سبدهایی که هنوز درست نشده‌اند، سبدی با بیشترین میزان برنج و سبدی با بیشترین تعداد تخم‌مرغ را در نظر بگیرید. به وضوح سبد اول حداقل ۱۰ کیلوگرم برنج دارد و سبد دوم حداقل ۳۰ عدد تخم‌مرغ دارد. (ممکن است این دو سبد یکی باشند، در این صورت همین سبد و یک سبد دل‌خواه دیگر را انتخاب کنید.) با جابجایی اجناس بین این دو سبد می‌توان یک سبد با دقیقاً ۱۰ کیلوگرم برنج و دقیقاً ۱۰ عدد تخم‌مرغ ساخت. بنابراین در هر مرحله می‌توان حداقل یک سبد را درست کرد، پس از ۹۹ مرحله ۹۹ سبد درست شده‌اند، پس سبد آخر نیز خود به خود درست شده است.

۲. مربع $ABCD$ مفروض است. دو نقطه N و P ، به ترتیب، روی اضلاع AB و AD به شکلی انتخاب شده اند که $PN = NC$ و نقطه Q روی پاره خط AN طوری انتخاب شده که $\widehat{NCB} = \widehat{QPN}$. ثابت کنید:

$$\widehat{BCQ} = \frac{1}{4} \widehat{PQA}.$$

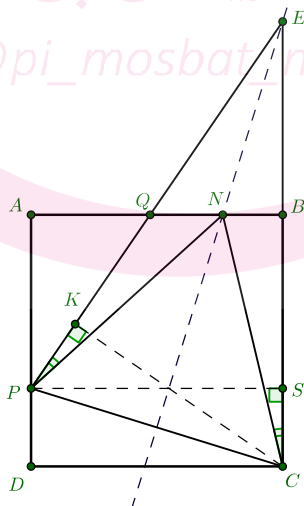
راه حل. خط PQ را امتداد می دهیم تا خط BC را در نقطه E قطع کند. طبق فرض $PN = NC$ ، پس $\angle NPC = \angle PCN$. همچنین می دانیم $\angle QPN = \angle NCB$. از جمع این دو رابطه درمی یابیم مثلث EPC متساوی الساقین است. در این مثلث ارتفاع های CK و PS را رسم می کنیم. چون مثلث EPC متساوی الساقین است $PS = CK$. از طرفی PS برابر طول ضلع مربع است پس $CK = CB$. در چهارضلعی $QBCK$ مجموع زاویه های $\angle QBC$ و $\angle CKQ$ برابر 180° درجه است. در نتیجه این چهارضلعی محاطی است و

$$\angle BCK = \angle AQP.$$

توجه کنید که دو مثلث قائم الزاویه CKQ و CBQ به حالت وتر و یک ضلع ($CQ = CQ, CK = CB$) همنهشت هستند. بنابراین QC نیمساز $\angle KCB, \angle KQB$ است و

$$\angle BCQ = \frac{\angle KCB}{2} = \frac{\angle AQP}{2}.$$

المپیاد ریاضی پی مثبت
@pi_mosbat_math



۳. اعداد حقیقی و نامنفی x ، y و z مفروض هستند. می دانیم:

$$2(xy + xz + zy) = x^2 + y^2 + z^2.$$

ثابت کنید:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{2xyz}.$$

راه حل نخست:

فرض کنید $x \geq y \geq z$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 2(xy + yz + zx) \\ \Rightarrow 1x^2 + x(-2y - 2z) + y^2 + z^2 - 2yz &= 0 \\ \Rightarrow x &= (y+z) \pm \sqrt{(y+z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz} = (y+z) \pm 2\sqrt{yz} = (y+z) \pm 2\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2 \\ \Rightarrow \sqrt{x} &= \sqrt{y} - \sqrt{z} \text{ یا } \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z} \end{aligned}$$

که با فرض $x \geq y \geq z$ تنها حالت $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$ یا معادلا $x = y + z + 2\sqrt{yz}$ رخ می دهد. حال با جای گذاری x در حکم به نابرابری معادل زیر می رسیم

$$\frac{y+z+2\sqrt{yz}+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{2(y+z+2\sqrt{yz})yz}$$

برای اثبات نابرابری بالا ابتدا فرض کنیم $y = 0$ ولی در این حالت حکم اصلی مسئله واضح است چون سمت راست صفر و سمت چپ مثبت است. حال فرض کنید y مخالف صفر است ($y = 0$ بدیهی است) و دو طرف حکم معادل بالا را بر y تقسیم کنید و فرض کنید $\frac{z}{y} = t$ پس باید ثابت کنیم:

$$\frac{2t+2\sqrt{t}+2}{3} \geq \sqrt[3]{2(t+1+2\sqrt{t})t}$$

که این هم با استفاده از نابرابری حسابی-هندسی به دست می آید:

$$\begin{aligned} \frac{2t+2\sqrt{t}+2}{3} &= \frac{(\sqrt{t}+1) + (\sqrt{t}+1) + 2t}{3} \geq \sqrt[3]{(\sqrt{t}+1)^2 2t} \\ &= \sqrt[3]{2(t+1+2\sqrt{t})t} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

فرض کنید $x \geq y \geq z$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow x^2 + x(-2y - 2z) + y^2 + z^2 - 2yz = 0$$

$$\Rightarrow x = (y + z) \pm \sqrt{(y + z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz} = (y + z) \pm 2\sqrt{yz} = (y + z) \pm 2\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - \sqrt{z} \text{ یا } \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

که با فرض $x \geq y \geq z$ تنها حالت $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$ یا معادلا

$$x = y + z + 2\sqrt{yz}$$

رخ می دهد. حال با جایگذاری x در حکم به نابرابری معادل زیر می رسیم

$$\frac{y + z + 2\sqrt{yz} + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{2(y + z + 2\sqrt{yz})yz}$$

فرض کنید $A = \frac{y + z}{2}$ و $B = \sqrt{yz}$ حال چون $A \geq B$ (نابرابری حسابی-هندسی) می توان فرض کرد

$A = B + e$ که $e \geq 0$ در این صورت با جای گذاری $A = B + e$ در رابطه قبل به حکم معادل زیر می رسیم

$$2B + \frac{4e}{3} \geq \sqrt[3]{2(4B + 2e)B^2}$$

حال اگر دو طرف را به توان سه برسانیم به حکم معادل زیر می رسیم

$$(2B + \frac{4e}{3})^3 \geq 8B^3 + 4eB^2$$

اما داریم:

$$(2B + \frac{4e}{3})^3 = 8B^3 + 3(2B)^2 \frac{4e}{3} + 6B(\frac{4e}{3})^2 + (\frac{4e}{3})^3 \geq 8B^3 + 16B^2e \geq 8B^3 + 4eB^2$$

پس رابطه مورد نظر ثابت شد.

۴. تمام جواب های طبیعی معادله زیر را بیابید.

$$n^{n^n} = m^m.$$

راه حل نخست:

عدد طبیعی k و عدد صحیح نامنفی t را طوری انتخاب می کنیم که k بر n بخش پذیر نباشد و $m = kn^t$ (ابتدا t را بزرگ ترین عدد صحیح نامنفی در نظر می گیریم که m بر n^t بخش پذیر باشد، سپس k را برابر حاصل تقسیم m بر n^t در نظر می گیریم). با این جای گذاری در تساوی اصلی خواهیم داشت

$$n^{n^n} = m^m = (kn^t)^{kn^t}$$

از دو طرف رادیکال به فرجه n^t می گیریم

$$n^{n^{n-t}} = (kn^t)^k = k^k n^{kt}$$

دو طرف را بر n^{kt} تقسیم می کنیم

$$n^{n^{n-t}-kt} = k^k \quad (1)$$

اگر $t \geq n$ آن گاه $n^t \geq n^n$ ، پس $m = kn^t \geq n^t \geq n^n$ و در نتیجه

$$m^m = n^{n^n} \leq n^m \Rightarrow m \leq n \Rightarrow n^n \leq n \Rightarrow n \leq 1 \Rightarrow n = 1$$

و جواب $m = n = 1$ به دست می آید.

اما اگر $t < n$ آن گاه $n - t$ مثبت است و $n^{n-t} - kt$ عددی صحیح. فرض کنید $s = n^{n-t} - kt$ ، در این صورت $n^s = k^k$. اگر $s < 0$ آن گاه یک طرف تساوی اخیر ناصحیح می شود، در حالی که طرف دیگر صحیح است. اگر $s = 0$ آن گاه $k = 1$ که در انتها بررسی شده. فرض کنیم $s > 0$ ، در این صورت اگر عدد اولی تنها یکی از k و n را بشمارد آن گاه این عدد اول تنها یکی از دو طرف تساوی $n^s = k^k$ را می شمارد که این ممکن نیست. پس عوامل اول n و k یکسان اند. فرض کنید $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ و $k = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ این دو عدد به عوامل اولشان باشد، در این صورت

$$n^s = k^k \Rightarrow (p_1^{\alpha_1})^s \cdots (p_r^{\alpha_r})^s = (p_1^{\beta_1})^k \cdots (p_r^{\beta_r})^k$$

از برابری توان های هر عدد اول در دو طرف تساوی نتیجه می گیریم

$$p_i^{\alpha_i s} = p_i^{\beta_i k} \Rightarrow \alpha_i s = \beta_i k \Rightarrow \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{k}{s}$$

اگر $s \geq k$ آن گاه $\beta_i \geq \alpha_i$ و در نتیجه k بر n بخش پذیر است که خلاف فرض اولیه است.

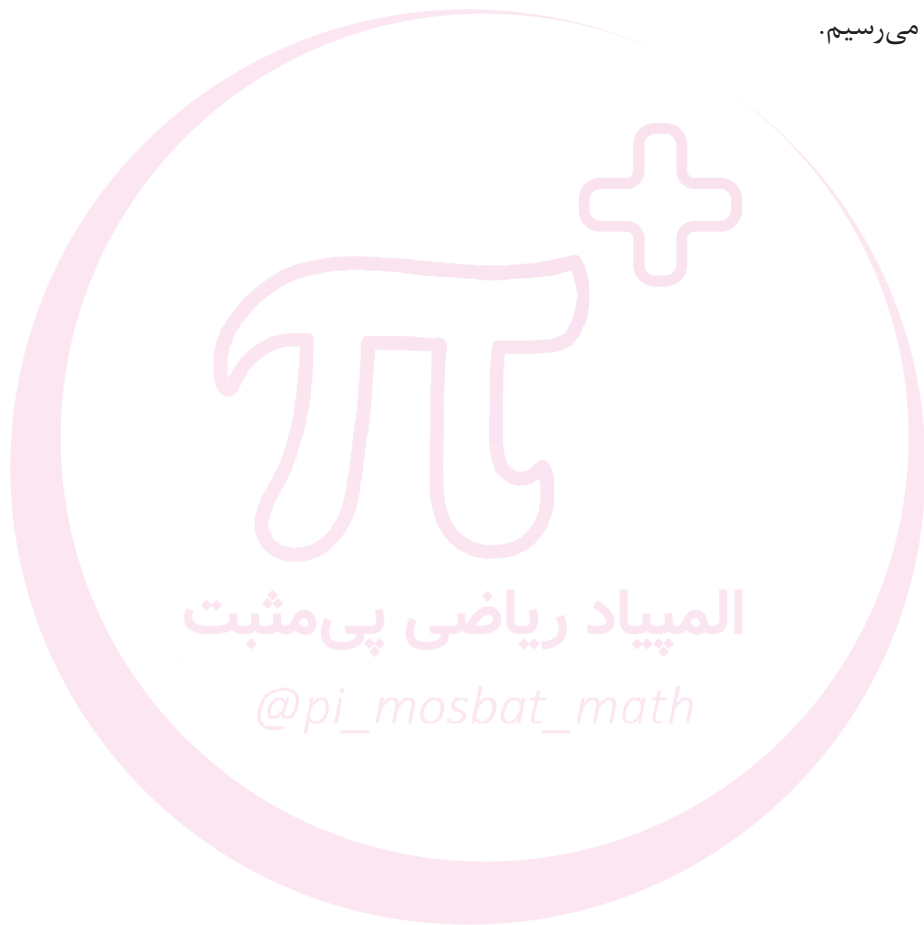
اگر $k > s$ آن گاه $\alpha_i > \beta_i$ و در نتیجه n بر k بخش پذیر است. پس n^{n-t} هم بر k بخش پذیر است. از دو طرف تساوی (۱) رادیکال فرجه k می گیریم

$$n^{\frac{n-t}{k}-t} = k$$

چون توان n در این عبارت صحیح است و k مضربی از n نیست به ناچار $s = 0$ و $k = 1$. یعنی $n^{n-t} - t = 0$ اما

$$t = n^{n-t} \geq n^1 \geq n > t$$

و به تناقض می رسیم.



راه حل دوم:

ابتدا توجه کنید که اگر $n = 1$ آن گاه $m = 1$ و جواب $m = n = 1$ به دست می آید. از این به بعد فرض می کنیم $n > 1$. فرض کنیم $r = \log_n m$ ، در این صورت $m = n^r$ و

$$n^{n^n} = m^m = (n^r)^{n^r} = n^{rn^r}$$

چون $n > 1$ باید توان های n در دو طرف برابر باشد

$$n^n = rn^r \Rightarrow r = n^{n-r} \quad (2)$$

از طرفی با گرفتن لگاریتم (پایه n) از دو طرف تساوی $n^{n^n} = m^m$ به دست می آوریم

$$n^n = m \log_n m \Rightarrow r = \frac{n^n}{m} \quad (3)$$

لم. اگر به ازای عددی طبیعی مثل n و عددهایی گویا و مثبت مثل p و q تساوی $n^p = q$ برقرار شود آن گاه q عددی طبیعی است.

اثبات. فرض کنید $p = \frac{a}{b}$ و $q = \frac{c}{d}$ نمایش های کسری این دو عدد گویا باشند. در این صورت

$$n^p = q \Rightarrow n^{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Rightarrow n^a = \left(\frac{c}{d}\right)^b = \frac{c^b}{d^b} \Rightarrow d^b | c^b \Rightarrow d | c \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

ادامه راه حل. بنابر تساوی (۲) r گویاست و بنابر تساوی (۱)، با فرض $p = n - r$ و $q = r$ داریم $n^p = q$ گویا بودن p و q نتیجه مستقیم گویا بودن r است. پس بنابر لم، q باید عددی طبیعی باشد. یعنی r عددی طبیعی است.

@pi_mosbat_math

اگر $r < n$ آن گاه $n^{n-r} \geq n^1 > r$ در نتیجه تساوی امکان پذیر نیست.

اگر $r > n$ آن گاه $n^{n-r} < 1 < r$ در نتیجه باز هم تساوی ممکن نیست.

اگر $n = r$ آن گاه $r = n^{n-r} = 1$ پس $n = r = 1$ که خلاف فرض $n > 1$ است.

در نتیجه تنها جواب $m = n = 1$ است.

۵. زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی مثبت مانند S را «توانا» گوئیم در صورتی که هرگاه a و b دو عضو متمایز آن باشند آن گاه دست کم یکی از اعداد a^b یا b^a عضو S باشند.
- الف. یک مجموعه توانای چهار عضوی مثال بزنید.
- ب. ثابت کنید یک مجموعه توانای متناهی؛ بیش از چهار عضو ندارد.

راه حل.

الف. $\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}\}$ یک مجموعه توانای ۴ عضوی است:

$$1^x = 1, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}.$$

(البته این مثال را می توان با تحلیل صورت کلی مجموعه های توانا - همان طور که در ادامه خواهد آمد - به دست آورد).

ب. ابتدا چند خاصیت اساسی عمل به توان رساندن را یادآوری می کنیم:

- برای هر عدد مثبت x و اعداد مثبت $a < b$ ، $a^x < b^x$.
- اگر عدد حقیقی a بیشتر از ۱ باشد، مقدار a^x با افزایش x زیاد می شود؛ به عبارت دیگر، اگر $x < y$ ، $a^x < a^y$.
- اگر عدد حقیقی مثبت a کمتر از ۱ باشد، مقدار a^x با افزایش x کم می شود.

حال به سراغ حل مسأله می رویم. ابتدا یک لم:

لم. یک مجموعه توانای متناهی نمی تواند هم زمان شامل یک عضو بزرگتر از ۱ و یک عضو کمتر از ۱ باشد.

اثبات. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت مجموعه توانای متناهی S وجود دارد که هم شامل عضوی بزرگتر از ۱ و هم شامل عضوی کوچکتر از ۱ است. کوچکترین عضو مجموعه S را با a و کوچکترین عضو در میان اعضای بزرگتر از ۱ را با b نمایش می دهیم. (بنابر متناهی بودن S چنین اعضایی وجود دارند.) در نتیجه $a < 1 < b$ داریم. اما $a^b < a^1 = a$ ، پس a^b نمی تواند در S باشد. همین طور $1 = b^0 < b^a < b^1 = b$ ، اما S شامل عضوی بین ۱ و b نیست، پس b^a هم نمی تواند در S باشد. پس هیچ یک از دو عدد a^b و b^a در S قرار ندارند و این توانا بودن S را نقض و لم را ثابت می کند. $\square$

با توجه به لم، مجموعه های توانای متناهی، دو نوع هستند. نوع اول آن هایی هستند که همه اعضای آنها بیشتر یا مساوی ۱ هستند و نوع دوم آن هایی هستند که همه اعضای آنها کمتر یا مساوی ۱ هستند.

فرض کنیم S مجموعه توانایی از نوع اول و با بیش از ۳ عضو باشد. همچنین $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ اعضای بزرگتر از ۱ در S باشند. از آنجایی که S عضو کمتر از ۱ ندارد، تعداد اعضای آن حداکثر یکی از n بیشتر است و در نتیجه $n \geq 3$. برای هر $1 \leq i < n$ ، $a_n^{a_i}$ از a_n بیشتر است، پس در S قرار نمی گیرد. پس توانا بودن S ایجاب می کند که $a_i^{a_n}$ در S باشد. حال

$$a_1 < a_1^{a_n} < a_2^{a_n} < \dots < a_{n-1}^{a_n}$$

n عضو بزرگتر از ۱ در S هستند، از طرف دیگر $a_1 < \dots < a_n$ همه اعضای بزرگتر از ۱ در S بودند، پس

$$a_2 = a_1^{a_n}, a_3 = a_2^{a_n}, \dots, a_n = a_{n-1}^{a_n}.$$

حال بیاید توانا بودن S را در مورد a_1 و a_{n-1} بررسی کنیم. (با توجه به $n \geq 3$ ، $1 < n-1$) با توجه به $a_1 > 1$ داریم:

$$a_1 = a_1^1 < a_1^{a_{n-1}} < a_1^{a_n} = a_2.$$

پس $a_1^{a_{n-1}}$ عددی بین a_1 و a_2 است و چنین عددی در S وجود ندارد. به طریق مشابه:

$$a_{n-1} < a_{n-1}^{a_1} < a_{n-1}^{a_n} = a_n.$$

پس $a_{n-1}^{a_1}$ هم در S قرار ندارد. پس S نمی تواند توانا باشد و نتیجه می گیریم که مجموعه های توانای نوع اول حداکثر ۳ عضو دارند.

حال فرض کنید S یک مجموعه توانای متناهی از نوع دوم با بیش از ۴ عضو و $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ اعضای کمتر از ۱ در آن باشند. پس n حداقل ۴ است. $a_n < 1$ پس برای هر $1 \leq i < n$ ، $a_n^{a_i} > a_n^{a_n} = 1$. پس $a_n^{a_i}$ در S قرار ندارد و $a_i^{a_n}$ عضو S است. داریم:

$$a_1 = a_1^1 < a_1^{a_n} < a_2^{a_n} < \dots < a_{n-1}^{a_n} < 1.$$

و در نتیجه مشابه استدلال حالت قبل داریم

$$a_2 = a_1^{a_n}, a_3 = a_2^{a_n}, \dots, a_n = a_{n-1}^{a_n}.$$

و یا معادلاً

$$a_{n-1} = a_n^{\frac{1}{a_n}}, a_{n-2} = a_{n-1}^{\frac{1}{a_n}}, \dots, a_1 = a_2^{\frac{1}{a_n}}.$$

پس اگر a_n را با a نشان دهیم، اعضای S به صورت زیر هستند:

$$\dots < a^{\frac{1}{a^7}} < a^{\frac{1}{a}} < a.$$

حال توجه کنید که $a_{n-1} < 1$ پس

$$a_n = a_{n-1}^{a_n} < a_{n-1}^{a_{n-2}} < 1.$$

پس $a_{n-2}^{a_{n-1}}$ در S قرار دارد و چون

$$a_{n-2}^{a_{n-1}} > a_{n-2}^{a_n} = a_{n-1}$$

$a_{n-2}^{a_{n-1}} = a_n$ پس داریم:

$$\begin{aligned} a_{n-2}^{a_{n-1}} &= \left(a^{1/a^2}\right)^{(a^{1/a})} = a \implies a^{a^{(1/a)-2}} = a \\ \implies a^{\frac{1}{a}-2} &= 1 \end{aligned}$$

که با توجه به این که $a \neq 1$ پس $\frac{1}{a} - 2 = 0$ و در نتیجه $a = \frac{1}{2}$. پس $a_n = \frac{1}{2}, a_{n-1} = \frac{1}{4}, a_{n-2} = \frac{1}{16}$. حال $n \geq 4$ پس $n-3 \geq 1$ و $a_{n-3} = a_{n-2}^2 = \frac{1}{64}$. حال شرط توانا بودن را برای a_{n-2} و a_{n-3} بررسی می کنیم:

$$a_n = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2^4}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{1}{2^4}\right)^{\frac{1}{16}} = a_{n-2}^{a_{n-3}} < 1.$$

همین طور

$$\frac{1}{2} < a_{n-2}^{a_{n-3}} = \left(\frac{1}{2^4}\right)^{\frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} < 1.$$

پس هیچ یک از دو عدد $a_{n-2}^{a_{n-3}}$ و $a_{n-3}^{a_{n-2}}$ در S قرار ندارند و شرط توانا بودن نقض می شود. پس مجموعه های توانای نوع دوم حداکثر ۴ عضو دارند. پس هر دو نوع مجموعه توانای متناهی حداکثر ۴ عضو دارد.

المپیاد ریاضی پی مثبت
@pi_mosbat_math

۶. در انجمن «معمابازان حرفه ای» اعضا به تعدادی گروه تقسیم شده اند و در پایان هر هفته گروه بندی ها به شکل خاصی تغییر می کند؛ در هر گروه یکی از اعضا به عنوان به ترین عضو مشخص می شود و همه به ترین های گروه ها از گروه خود جدا شده و تشکیل یک گروه جدید را می دهند. اگر گروهی فقط یک عضو داشته باشد همان عضو به گروه جدید می رود و گروه قبلی منحل می شود. فرض کنید انجمن n عضو دارد و در ابتدا همه اعضا در یک گروه بوده باشند. ثابت کنید هفته ای فرا می رسد که از آن به بعد تعداد اعضای تمام گروه ها حداکثر $1 + \sqrt{2n}$ است.

راه حل نخست:

پیش از هر سخنی ابتدا به این نکته واضح و کلیدی دقت کنید که اگر k گروه با اعضای $1, 2, \dots, k$ داشته باشیم، در مرحله بعد هم k گروه با اعضای $1, 2, \dots, k$ خواهیم داشت. حال به حل سوال توجه کنید.
 لم: اگر $n = \binom{k}{2}$ همواره پس از $\binom{k}{2}$ حرکت، در نهایت $k - 1$ گروه خواهیم داشت که به ازای هر i که $1 \leq i < k$ گروهی با i عضو موجود باشد.

اثبات لم: برای $k = 2$ بدیهی است و برای $k = 3$ نیز داریم $n = \binom{3}{2} = 3$ که پس از یک حرکت به حالت یک گروه یک نفره و یک گروه دو نفره می رسیم.

فرض می کنیم حکم استقرا به ازای هر $1 \leq k \leq m$ برقرار باشد، حال حکم را برای $k = m + 1$ اثبات می کنیم. بنابراین فرض کنید گروه اصلی گروهی با $\binom{m+1}{2}$ عضو باشد. طبق فرض استقرا پس از $\binom{m}{2}$ حرکت، $m - 1$ گروه جدید خواهیم داشت که به ازای هر i که $1 \leq i \leq m - 1$ گروهی با i عضو موجود باشد. ضمناً تعداد اعضای گروه اصلی هم برابر با $\binom{m}{2} - \binom{m+1}{2} = m$ است. بنابر این حکم با استقرا اثبات شد.

حال به اثبات باقیمانده سوالات می رویم: فرض کنید $n = \binom{k}{2} + t$ به طوری که $n \leq \binom{k+1}{2}$ می خواهیم اثبات کنیم مرحله ای وجود دارد که از آن به بعد تعداد اعضای بزرگترین گروه n نفر است. برای این کار هم به سادگی مانند اثبات لم بالا فرض کنید $\binom{k+1}{2}$ معماباز داریم که $\binom{k+1}{2} - \binom{k}{2} - t$ تا از آنها عضو فرعی و بقیه اصلی هستند. (در واقع تعدادی عضو فرعی اضافه نمودیم). در هر مرحله هم اولویت برداشت عضو از هر گروه با اعضای اصلی آن گروه می باشد (اعضای فرعی تا جای ممکن از همه می بازند!). طبق لم می دانیم مرحله ای وجود دارد که از آن به بعد به ازای هر $1 \leq i \leq k$ ، گروهی با i عضو وجود دارد. در هر مرحله تعداد اعضای هر گروه از k بیشتر نمی شود و بدون در نظر گرفتن اعضای فرعی هم این حکم درست است. بنابراین تعداد اعضای اصلی از k بیشتر نمی شود. پس حکم به این صورت نتیجه می شود:

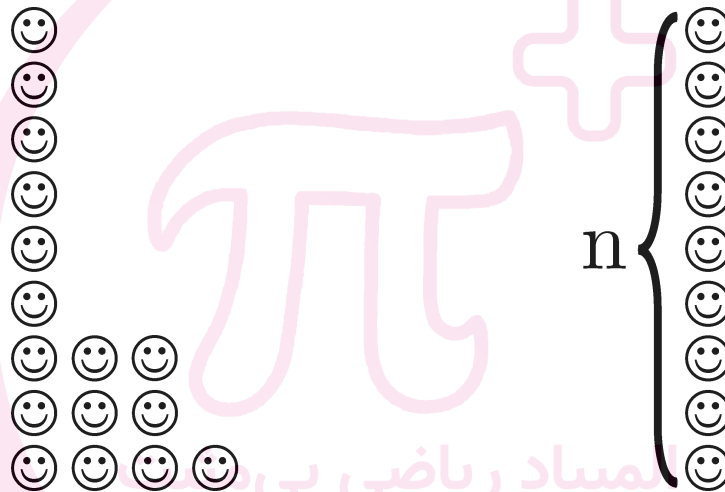
$$\frac{k^2 - k}{2} = \binom{k}{2} < n = \binom{k}{2} + t \leq \binom{k+1}{2} \\ \Rightarrow k^2 - k + \frac{1}{2} < 2n \Rightarrow (k - \frac{1}{2})^2 < 2n \Rightarrow k < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < \sqrt{2n} + 1$$

راه حل دوم:

توجه کنید که سوال معادل این است که ثابت کنیم اگر در ابتدا یک دسته n تایی از دواير داشته باشیم و در هر مرحله از هر دسته یک دایره انتخاب کرده و با آنها دسته‌ای جدید ایجاد کنیم، مرحله‌ای فرا خواهد رسید که از آن مرحله به بعد، هر دسته شامل حداکثر $\sqrt{2n} + 1$ دایره باشد.

برای این که راه حل قابل فهم‌تر باشد تعدادی تعریف کرده و شهودی کلی از اثبات ارائه می‌دهیم و در انتها شهودی که ارائه دادیم را دقیق می‌کنیم.

تعریف ۱: برای هر دسته‌بندی از دواير، «قیافه» این دسته‌بندی را نمایشی از دایره‌ها گوییم به طوری که هر دسته به شکل ستونی از دواير باشد و ستون‌ها نیز بر حسب تعداد دوايرشان مرتب شده باشند. در شکل زیر قیافه دسته‌بندی (n) را در سمت راست و قیافه دسته‌بندی $(1, 3, 9, 3)$ را در سمت چپ می‌بینید.



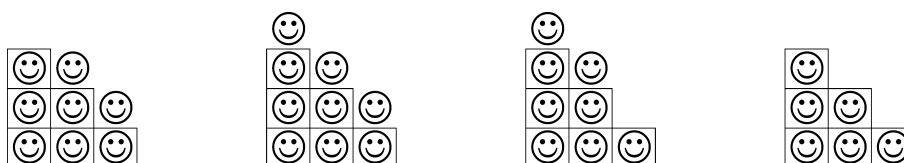
تعریف ۲: یک «پلکان به طول k » شامل $\binom{k+1}{1}$ دایره است به طوری که دایره‌ها در دسته‌های $1, 2, 3, 4, \dots, k$ تایی قرار داشته باشند.

تعریف ۳: یک «پلکان به طول k و تاج t » (که $t \leq k$) پلکانی به طول k است که به t دسته بزرگ‌تر آن یک دایره اضافه کرده‌ایم. در نتیجه شامل $\binom{k+1}{1} + t$ دایره است که در دسته‌های $1, 2, \dots, k-t, k-t+2, \dots, k, k+1$ تایی قرار گرفته‌اند. اگر $t = k+1$ پلکان به طول k و تاج t را همان پلکان به طول $k+1$ در نظر می‌گیریم. پس پلکان به طول k و تاج t یک پلکان به طول k است.

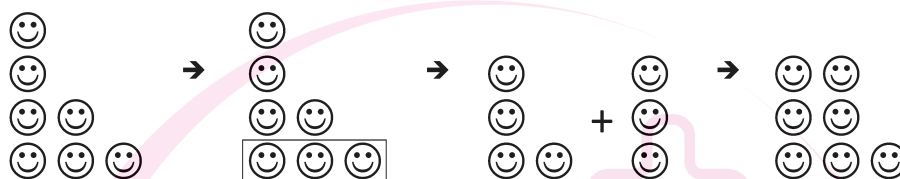
تعریف ۴: یک «ساختار پلکانی با m دایره» دسته‌بندی شامل m دایره است که اگر $\binom{k+2}{2} < m \leq \binom{k+1}{2}$ این دسته‌بندی به شکل پلکانی به طول k و تاج $m - \binom{k+1}{2}$ باشد.

تعریف ۵: یک «پلکان به طول k و تاج t و جایگاه r » (که $t \leq k+1$) پلکانی با دسته‌های $x_0, x_1, \dots, x_k$ است $(x_i$ می‌تواند ۰ باشد) که اگر $k-i$ به پیمانه $k+1$ عضو مجموعه $\{r, r+1, \dots, r+t-1\}$ باشد $x_i = i+1$ و در غیر این صورت $x_i = i$ پس پلکان به طول k و تاج t و جایگاه r یک پلکان به طول k و تاج t است.

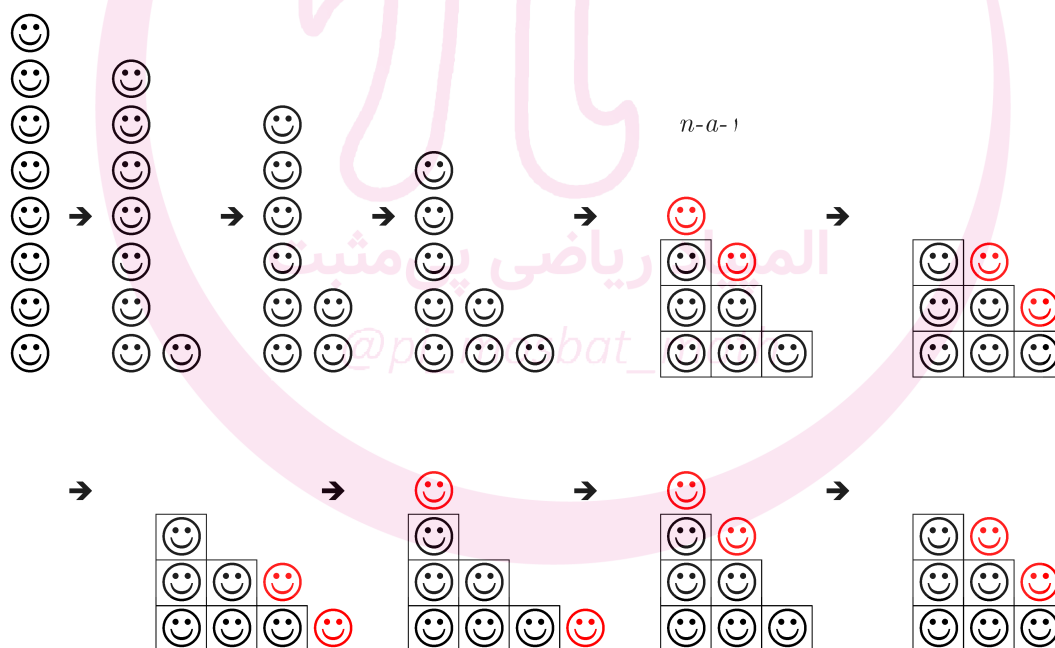
شکل زیر از راست به چپ قیافه یک پلکان به طول ۳، قیافه یک پلکان به طول ۳ و تاج ۲، قیافه یک ساختار پلکانی به طول ۹ و قیافه یک پلکان به طول ۳ و تاج ۲ و جایگاه ۵ را نشان می‌دهد.



نکته ۱: چنانچه یک دسته‌بندی داشته‌باشیم، در هر مرحله قیافه دسته‌بندی به این شکل تغییر می‌کند: سطر پایینی جدا شده و به یک ستون جدید تبدیل می‌شود. سپس این ستون بر حسب تعداد دوايرش در جایگاه مناسب قرار می‌گیرد. برای مثال قیافه دسته $(2, 1, 4)$ به این شکل تغییر می‌کند:



اکنون فرض کنید $(a+1) < n \leq (a+2)$ و $b = n - (a+1)$ در ادامه راه می‌خواهیم اثبات کنیم دایره‌ها از مرحله $n - a - 1$ به بعد مانند شکل جمع شده و قیافه‌ها با الگوی خاصی تکرار می‌شوند.

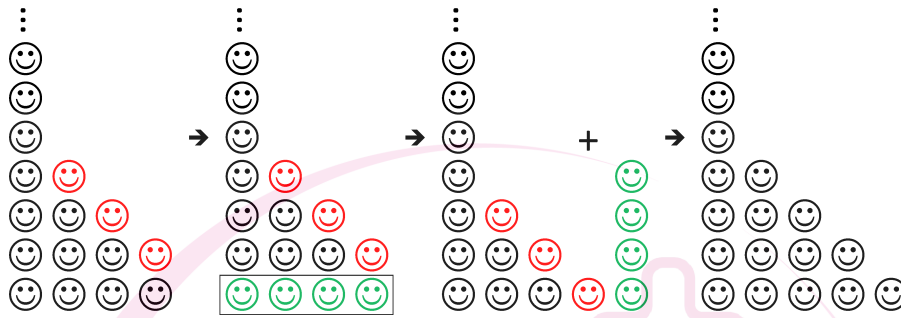


حال به اثبات دقیق می‌پردازیم.

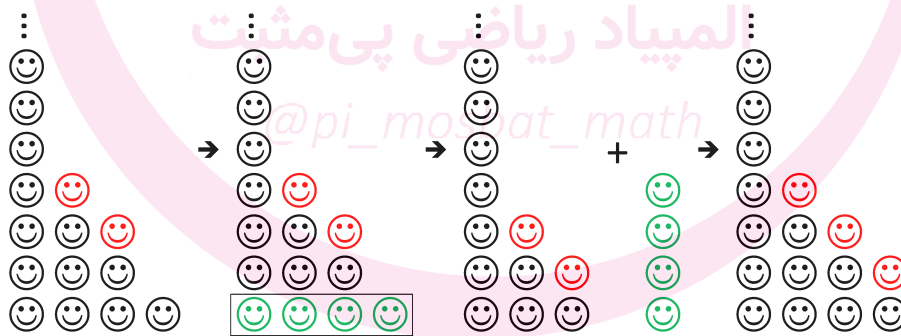
ادعا ۱: در مرحله l ام ($l < n$)، دسته‌بندی شامل یک ساختار پلکانی با l دایره به همراه یک دسته با $n - l$ دایره است.

اثبات ادعا: به استقرا روی l حکم را ثابت می‌کنیم. پایه استقرا با توجه به اولین عمل واضح است. برای اثبات گام استقرا توجه می‌کنیم که طبق فرض استقرا در مرحله $l - 1$ ام، دسته‌بندی شامل یک ساختار پلکانی با $l - 1$ دایره به همراه یک دسته با $n - l + 1$ دایره است. حال دو حالت داریم:

حالت نخست: k وجود داشته‌باشد که $l - 1 = \binom{k+1}{2} - 1$. در این حالت پلکانی به طول $k - 1$ و تاج $k - 1$ داریم پس دسته‌ها به طول $1, 2, 3, \dots, k - 1, k, n - l + 1$ هستند. که در مرحله بعد طول دسته‌ها برابر $1, 2, 3, \dots, k - 2, k - 1, k, n - l$ خواهد شد. که این یک پلکان به طول $k + 1$ به همراه یک ستون با $n - l$ دایره است. پس در این حالت مرحله بعد حاوی یک ستون با $n - l < 0$ دایره و یک ساختار پلکانی l تایی است.

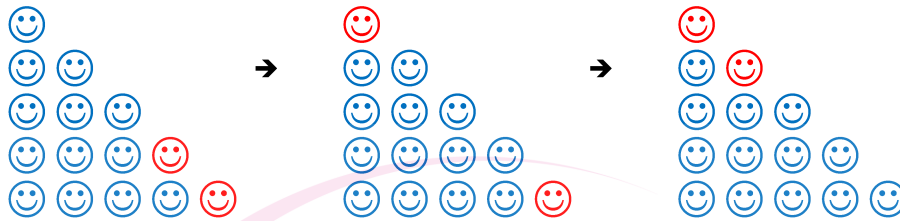


حالت دوم: $\binom{k}{2} \leq k - l < \binom{k+1}{2} - 1$ در این حالت ساختار پلکانی به شکل یک پلکان به طول $k - 1$ و تاج به طول نامنظمی و کمتر از $k - 1$ است. پس در این حالت پلکان شامل دسته‌ای به طول ۱ است. پس طول دسته‌ها به شکل $1, \dots, k - t - 1, k - t + 1, \dots, n - l + 1$ است (طول بزرگترین دسته ساختار k یا $k - 1$ است). حال با حذف یک دایره از هر دسته و ایجاد دسته‌های جدید دسته‌ای به طول k ایجاد می‌شود و دسته‌های موجود به شکل $1, \dots, k - t - 2, k - t, \dots, k, n - l$ خواهند بود (طول کوچکترین دسته ساختار ۱ یا ۲ خواهد بود). که این یک ساختار پلکانی با l دایره به همراه یک ستون با $n - l < 0$ دایره است.



پس در هر دو حالت حکم استقرا را نتیجه گرفتیم و این موجب اثبات ادعا می‌شود. حال می‌دانیم که ادعای ۱ برای هر $n < l$ درست است. پس این حکم برای $l = n - a - 1$ نیز درست است. پس در مرحله $n - a - 1$ یک ساختار پلکانی به طول $n - a - 1$ و یک ستون به طول $a + 1$ داریم. از آنجایی که $\binom{a+2}{2} < n \leq \binom{a+1}{2}$ پس $\binom{a+1}{2} \leq n - a - 1 \leq \binom{a}{2}$ که این نشان می‌دهد که ساختار پلکانی، پلکانی به طول $a - 1$ و تاج به طول مثبت (شاید a) دارد. پس با اضافه کردن دسته به طول $a + 1$ پلکانی به طول a به همراه تاج به طول مثبت (شاید $a + 1$) خواهیم داشت. ادعا می‌کنیم که پس از این، طول هیچ دسته‌ای از $a + 1$ بیشتر نمی‌شود. برای اثبات کل دایره‌های موجود را آبی کرده و تعدادی دایره قرمز روی پلکان اضافه می‌کنیم تا یک پلکان به طول $a + 1$ ایجاد کنند. با توجه به نکته ۱، پلکان به طول $a + 1$ پس از هر مرحله به خودش

تبدیل می شود. پس در قیافه شامل دایره های قرمز و آبی، طول دسته ها هیچ گاه بیشتر از $a + 1$ نمی شود. حال اگر در هر مرحله دایره های قرمز را در بالای هر دسته قرار دهیم نتیجه می شود که دایره های قرمز هیچ تأثیری در ساختار دایره های آبی ندارند و در نتیجه تعداد دایره های آبی در دسته هایشان همواره کمتر مساوی $a + 1$ است.



حال توجه کنید که

$$(a+1) < n \Rightarrow (a+1)^2 - (a+1) < 2n \Rightarrow (a+1)^2 - (a+1) + \frac{1}{4} < 2n \Rightarrow ((a+1) - \frac{1}{4})^2 < 2n \Rightarrow (a+1) - \frac{1}{4} < \sqrt{2n} \Rightarrow a+1 < \sqrt{2n} + 1$$

پس تعداد دایره های درون هر دسته همواره کمتر از $\sqrt{2n} + 1$ است.

اکنون می خواهیم کمی فراتر از راه حل سوال رفته و ساختار دسته بندی ها را پس از مرحله $n - a + 1$ نیز به دست بیاوریم. توجه کنید که در این مرحله دسته بندی ها یک پلکان به طول a و تاج b و جایگاه $\circ$ تشکیل داده اند. ادعا ۲: در مرحله $a - n + 1 + r$ پلکانی به طول a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

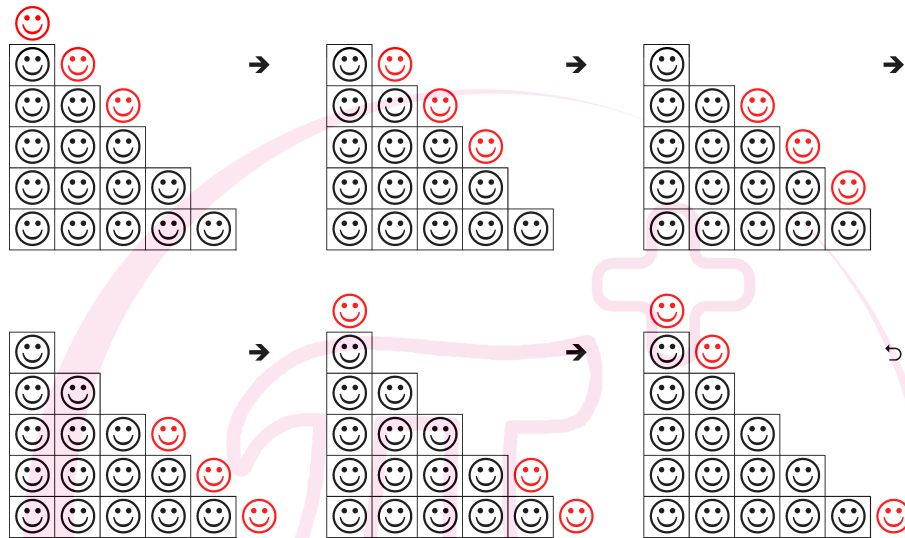
اثبات ادعا: برای اثبات ادعا روی r استقرا می زنیم. پایه همان نتیجه ادعا ۱ است. برای تکمیل گام استقرا فرض را برای $r - 1$ در نظر گرفته و دو حالت را در نظر می گیریم.

حالت نخست: a به پیمانه $a + 1$ عضو مجموعه $\{r - 1, r - 2, \dots, r + t - 2\}$ نباشد. در این حالت یک پلکان به طول a داریم و با توجه به فرض این حالت، مجموعه x در تعریف پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r دارای صفر دایره است. پس قیافه این دسته بندی دارای a دایره پایینی است و با جدا نمودن این دایره ها و ایجاد دسته جدید دسته x_a دارای a دایره خواهد بود. همچنین با توجه به این که دسته x_i به جای دسته x_{i-1} قرار گرفته است می توانیم ادعا کنیم که در دسته بندی جدید اگر $a - j$ به پیمانه $a + 1$ عضو مجموعه $\{r, r + 1, \dots, r + t - 1\}$ باشد $x_j = j + 1$ و در غیر این صورت $x_j = j$. پس در مرحله بعدی پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

حالت دوم: a به پیمانه $a + 1$ عضو مجموعه $\{r - 1, r - 2, \dots, r + t - 2\}$ باشد. در این حالت یک پلکان به طول a داریم و با توجه به فرض این حالت، مجموعه x در تعریف پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r دارای ۱ دایره است. پس قیافه این دسته بندی دارای $a + 1$ دایره پایینی است و با جدا نمودن این دایره ها و ایجاد دسته جدید دسته x_a دارای $a + 1$ دایره خواهد بود. همچنین با توجه به این که دسته x_i به جای دسته x_{i-1} قرار گرفته است می توانیم ادعا کنیم که در دسته بندی جدید اگر $a - j$ به پیمانه $a + 1$ عضو مجموعه $\{r, r + 1, \dots, r + t - 1\}$ باشد $x_j = j + 1$ و در غیر این صورت $x_j = j$. پس در مرحله بعدی پلکان به طول

a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

پس ادعای ۲ نیز ثابت شد. اکنون می‌توانیم ادعا کنیم که پس از مرحله $a - n - 1$ دسته‌بندی‌ها به نظم واضحی هر $a + 1$ مرحله تکرار می‌شوند و چون پیش از مرحله $n - a - 1$ دسته‌ای به طول $a + 2$ داشتیم، پس مرحله $n - a - 1$ اولین مرحله‌ایست که این تناوب شروع می‌شود. پس قیافه‌ی دسته‌بندی‌ها پس از مرحله $n - a - 1$ مانند شکل زیر خواهد بود:



المپیاد ریاضی پی‌مثبت
@pi_mosbat_math