

به نام او

روز اول

۱. فروشگاهی مسئول پخش ۱۰۰ سبد کالا است. هر سبد باید شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ باشد. می‌دانیم که مجموعاً ۱۰۰۰ کیلوگرم برنج و ۳۰۰۰ عدد تخم‌مرغ در سبدها وجود دارد ولی در برخی سبدها مقدار این دو کالا کمتر یا بیش‌تر از مقدار یادشده است. کارمندان فروشگاه می‌توانند در هر مرحله دو سبد را انتخاب و هر مقدار دل‌خواه برنج و هر تعداد تخم‌مرغ آن دو سبد را جابه‌جا کنند. دست‌کم در چند مرحله می‌توان، با شروع از هر وضعیت اولیه‌ای، برنج و تخم‌مرغ همه سبدها را با هم برابر کرد؟

۲. مربع $ABCD$ مفروض است. دو نقطه N و P ، به‌ترتیب، روی اضلاع AB و AD به شکلی انتخاب شده‌اند که $PN = NC$ و نقطه Q روی پاره‌خط AN طوری انتخاب شده که $\widehat{NCB} = \widehat{QPN}$. ثابت کنید

$$\widehat{BCQ} = \frac{1}{2} \widehat{PQA}.$$

۳. اعداد حقیقی و نامنفی x ، y و z مفروض هستند. می‌دانیم

$$2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2.$$

ثابت کنید

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

موفق باشید

به نام او

روز دوم

۴. تمام جواب‌های طبیعی معادله زیر را بیابید.

$$n^{n^n} = m^m$$

۵. زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی مثبت مانند S را «توانا» گوییم در صورتی که هرگاه a و b دو عضو متمایز آن باشند آن‌گاه دست‌کم یکی از اعداد a^b یا b^a عضو S باشند.
الف. یک مجموعه توانای چهار عضوی مثال بنویسید.
ب. ثابت کنید یک مجموعه توانای متناهی بیش از چهار عضو ندارد.

۶. در انجمن «معمابازان حرفه‌ای»، اعضا به تعدادی گروه تقسیم شده‌اند و در پایان هر هفته گروه‌بندی‌ها به شکل خاصی تغییر می‌کند؛ در هر گروه یکی از اعضا به عنوان به‌ترین عضو مشخص می‌شود و همه به‌ترین‌های گروه‌ها از گروه خود جدا شده و یک گروه جدید را تشکیل می‌دهند. اگر گروهی فقط یک عضو داشته باشد همان عضو به گروه جدید می‌رود و گروه قبلی منحل می‌شود. فرض کنید انجمن n عضو دارد و در ابتدا همه اعضا در یک گروه بوده باشند. ثابت کنید هفته‌ای فرا می‌رسد که از آن به بعد تعداد اعضای تمام گروه‌ها حداکثر $1 + \sqrt{2n}$ است.

المپیاد ریاضی پی‌مثبت
@pi_mosbat_math

موفق باشید