

خواننده‌ی عزیز سلام

جمع‌آوری، تولید، تدوین و انتشار محتوای علمی مفید و با کیفیت، نیازمند پشت سر گذاشتن سختی‌های بسیاری است. این کتاب و کتاب مجموعه سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول حاصل زحمات عزیزانی است که در کمیته‌ی ملی المپیاد ریاضی ایران در باش‌گاه دانش‌پژوهان جوان ساعات زیادی را صرف جمع‌آوری سؤالات آزمون‌های مرحله اول و مرحله دوم، نوشتن راه‌حل‌ها، ویرایش محتوا و... کرده‌اند. جا دارد که از این عزیزان که نام آن‌ها را در زیر می‌بینید، صمیمانه تشکر کنیم:

ماهد آبروشن، سید احسان آذرمنسا، احسان اسدی، صدرا بریری، مهران بهمنی، ماهان تجربه‌کار، سید علی‌رضا توکلی، مرتضی ثقفیان، خشایار خسروی، حسام‌الدین رجب‌زاده، سینا رضایی، عارف صادقی، عرفان صلواتی، جواد عابدی، علی‌رضا علی‌آبادیان، علی‌رضا عموزاد، مجید فرهادی، سپهر قاضی‌نظامی، پارسا مرادی، امیرعلی معین‌فر، روح‌الله مه‌کام، امیرحسین نوید ادهم.

ضمناً قسمتی از راه‌حل‌های سؤالات مرحله‌ی دوم با ترجمه و استفاده از راه‌حل‌هایی که در کتاب‌چه‌های سؤالات ایران (که بنا به رسم هر ساله‌ی المپیاد جهانی ریاضی جهت رد و بدل کردن با کشورهای دیگر در زمان برگزاری این مسابقات، به زبان انگلیسی تهیه می‌شود) نوشته شده است. به علاوه در مورد آزمون‌ها بعضی سال‌ها از مجموعه‌ی نشریه‌های دانش‌پژوه که حدود ده سال قبل توسط انتشارات باش‌گاه دانش‌پژوهان به چاپ می‌رسید استفاده شده است. بنابراین لازم است از همه‌ی کسانی که در سالیان مختلف در تهیه‌ی این کتاب‌چه‌ها و نشریه‌ها هم‌کاری کرده‌اند هم کمال تشکر را داشته باشیم. در پایان امیدواریم که محتوای این کتاب برای شما عزیزان مفید باشد.

مهرماه ۱۳۹۲

المپیاد ریاضی پی‌مثبت

@pi_mosbat_math

الف) ثابت کنید که با آغاز از هر حالتی، پس از تعدادی عمل به وضعیتی می‌رسیم که دیگر هیچ عملی قابل انجام نیست.

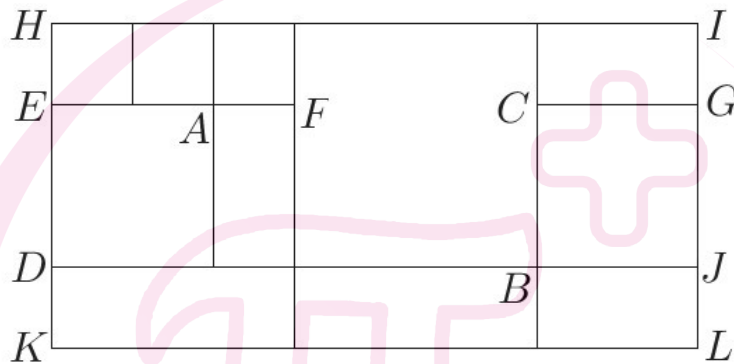
ب) فرض کنید در هر یک از خانه‌های اول تا n یک مهره قرار دارد. ثابت کنید با انجام اعمال ذکرشده هیچ‌گاه مهره‌ای از خانه‌ی $n + 1$ جلوتر نخواهد رفت.



۳.۰ سؤالات مرحله دوم بیستمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۱

۱. $a_1, a_2, \dots, a_n$ را یک جای گشت از اعداد ۱، ۲، ...، n می نامیم هرگاه $\{1, 2, \dots, n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (یعنی a_1 تا a_n همان اعداد ۱ تا n هستند که احتمالاً ترتیب آن ها تغییر کرده است). تمام جای گشت های ۱ تا n مانند $a_1, a_2, \dots, a_n$ را بیابید که برای $1 \leq i \leq n$ ، $2(a_1 + a_2 + \dots + a_i)$ بر $i+1$ بخش پذیر باشد. برای مثال $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 2$ یک جای گشت از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ است.

۲. یک مستطیل را به وسیله ی تعدادی مستطیل (کوچک تر) پوشانده ایم به طوری که مستطیل ها به جز احتمالاً در رئوس و اضلاع با هم اشتراکی ندارند. در ضمن اضلاع مستطیل های پوشاننده موازی اضلاع مستطیل اصلی هستند، هم چنین هیچ قسمتی از مستطیل ها بیرون از مستطیل اصلی قرار نمی گیرد. برای مثال، شکل زیر یکی از این حالت ها را نشان می دهد:



بنابرای هر طور که مستطیل را به وسیله ی مستطیل های کوچک تر با توجه به شرایط فوق بپوشانیم در شکل حاصل تعدادی خط (پاره خط) افقی و عمودی و تعدادی نقاط برخورد پاره خط ها دیده می شود، یک نقطه ی برخورد را یک ((چهارراه)) می گوئیم هرگاه محل تقاطع دو پاره خط باشد، مثلاً در شکل بالا نقاط A و B چهارراه هستند ولی نقاط C و D و K چهارراه نیستند، هم چنین در این شکل ۵ خط افقی و (KL, DJ, CG, EF, HI) و ۶ خط عمودی دیده می شود، در ضمن شکل به وسیله ی ۱۰ مستطیل پوشانده شده است.

نشان دهید در هر صورت اگر تعداد خط های افقی، عمودی و تعداد چهارراه ها در نظر بگیریم. و این سه عدد را با هم جمع کنیم، حاصل برابر است با تعداد مستطیل های پوشاننده به اضافه ی عدد سه.

۳. در چهارضلعی محدب ABCD داریم $\angle ABC = \angle ADC = 135^\circ$. ضمناً M و N به ترتیب نقاطی روی (امتداد) AD و AB می باشند به طوری که $\angle MCD = \angle NCB = 90^\circ$ ، هم چنین K محل برخورد دوم دایره های محیطی دو مثلث ABD و AMN می باشد. ثابت کنید AK بر KC عمود است.

۴. A و B دو نقطه ی ثابت در صفحه می باشند. چهارضلعی محدب ABCD به گونه ای ساخته می شود که $AB = BC$ و $AD = DC$ و زاویه ی $\angle ADC = 90^\circ$. ثابت کنید نقطه ای ثابت وجود دارد به طوری که هر طور چهارضلعی ABCD را در یک طرف AB بسازیم خط گذرنده از DC همواره از این نقطه می گذرد.

۵. مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با اضافه کردن موجودی جدید به نام δ به فضای بزرگ‌تری توسعه داده‌ایم، فضای جدید را با $R[\delta]$ نشان می‌دهیم و اعضای آن موجوداتی به شکل $a + b\delta$ هستند که $a, b \in R$. نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

قرارداد می‌کنیم که $a + b\delta = a' + b'\delta$ اگر و تنها اگر $a = a'$ و $b = b'$. δ موجودی بسیار کوچک است به طوری که هر چند صفر نیست ولی $\delta^2 = 0$! روی این فضا جمع و ضرب به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(a + b\delta) + (a' + b'\delta) = (a + a') + (b + b')\delta$$

$$(a + b\delta)(a' + b'\delta) = aa' + ab'\delta + ba'\delta + bb'\delta^2 = aa' + (ab' + ba')\delta$$

فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، نشان دهید که این چندجمله‌ای در R ریشه‌ی مضاعف دارد، اگر و تنها اگر در $R[\delta]$ ریشه‌های غیر حقیقی داشته باشد. (ریشه‌ی غیر حقیقی یعنی ریشه‌ای به شکل $a + b\delta$ که $b \neq 0$).

توضیح می‌گوییم a ریشه‌ی مضاعف چندجمله‌ای $P(x)$ است اگر $P(x)$ بر $(x - a)^2$ بخش‌پذیر باشد.

۶. در یک کلاس ۲۰ نفره در سال گذشته ۱۰۰ مسابقه‌ی تنیس روی میز بین بچه‌های کلاس برگزار شده است، هیچ دو نفری بیش از یک بار با هم مسابقه نداده‌اند. بچه‌های کلاس می‌خواهند از بین خود دو تیم دو نفره (دو تیم عضو مشترک ندارند) برای شرکت در مسابقات مدرسه انتخاب کنند با این شرط که دو عضو یک تیم در سال گذشته با هم بازی کرده باشند، می‌دانیم که این کار به ۴۰۵۰ طریق مختلف امکان‌پذیر است. ثابت کنید همه‌ی بچه‌های کلاس در سال گذشته به تعداد مساوی بازی کرده‌اند.

المپیاد ریاضی پی‌مثبت

@pi_mosbat_math

۴.۰ سؤالات مرحله دوم بیست و یکمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۲

۱. عدد طبیعی n را سه لایه ای می نامیم، هرگاه بتوان مجموعه ای مقسوم علیه های مثبت آن را به سه دسته طوری تقسیم کرد که مجموع اعضای هر سه دسته با هم برابر باشد.

الف. عددی سه لایه ای مثال بزنید.

ب. ثابت کنید بی نهایت عدد سه لایه ای وجود دارد.

۲. در یک روستا n خانه وجود دارد ($n \geq 3$) به طوری که همه ی آن ها روی یک خط قرار ندارند. می خواهیم یک منبع آب در این روستا احداث کنیم. برای این کار نقطه ای A مناسب تر از نقطه ای B است اگر مجموع فواصل A تا خانه ها کم تر از مجموع فواصل B تا خانه ها باشد. نقطه ای را ایده آل می گوئیم که هیچ نقطه ای مناسب تر از آن وجود نداشته باشد. ثابت کنید حداکثر یک نقطه ای ایده آل برای احداث منبع آب وجود دارد.

۳. n تیم والیبال دو به دو (هر دو تیم دقیقاً یک بار) با هم مسابقه داده اند. برای هر دو تیم متمایز A و B دقیقاً t تیم وجود دارند که از هر دو تیم A و B باخته اند. ثابت کنید $n = 4t + 3$. (توجه کنید که در والیبال تساوی وجود ندارد.)

۴. برای هر سه عدد حقیقی x, y و z با شرط $xyz = -1$ ، نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 3(x + y + z) \geq \frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y}$$

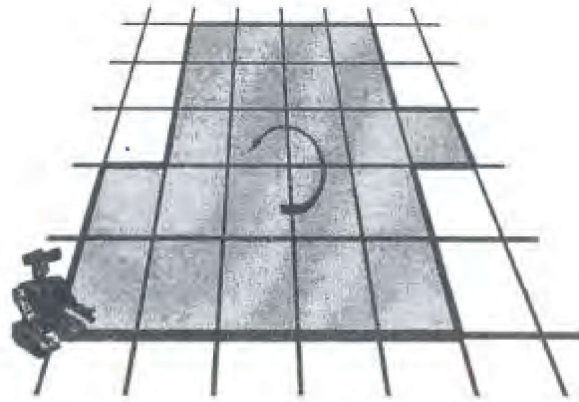
۵. زاویه $\angle A$ کوچک ترین زاویه ی مثلث ABC می باشد. نقطه ای D روی کمان کوچک تر BC از دایره ی محیطی مثلث ABC واقع است.

عمود منصف های AB, AC با خط AD به ترتیب در نقطه های M و N برخورد می نمایند. نقطه ای T محل برخورد BM و CN است. ثابت کنید

$$BT + CT \leq 2R$$

که R شعاع دایره ی محیطی مثلث ABC است.

۶. یک روبات از یک رأس دل خواه روی صفحه ی شطرنجی بزرگ شروع به حرکت کرده و هر بار یک واحد به یکی از جهت های اصلی روی اضلاع صفحه ی شطرنجی حرکت می کند. این روبات دارای دو خانه ی حافظه ای A و B است که در ابتدای کار در هر دو خانه عدد صفر قرار دارد.



در هر مرحله بر حسب این که حرکت به سمت شمال، جنوب، شرق یا غرب باشد، به ترتیب به خانه‌ی A یکی اضافه می‌شود، از خانه‌ی A یکی کم می‌شود، به خانه‌ی B به اندازه‌ی عدد خانه‌ی A اضافه می‌شود یا از خانه‌ی B به اندازه‌ی عدد خانه‌ی A واحد کم می‌شود. فرض کنید روبات مسیری را طی کند که خودش را قطع نکرده و در نهایت به جای اول خود بازگردد. ثابت کنید در انتهای مسیر قدر مطلق مقدار خانه‌ی حافظه‌ی B ، برابر با مساحت درونی شکلی است که روبات پیموده.

المپیاد ریاضی پی‌مثبت

@pi_mosbat_math

۵.۰ سؤالات مرحله دوم بیست و دومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۳

۱. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\angle A = 90^\circ$)، نقطه‌ی D محل برخورد نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A با ضلع BC و نقطه‌ی I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر زاویه‌ی A است. I_a محل برخورد نیم‌سازهای زوایای خارجی B و C است. ثابت کنید:

$$\frac{AD}{DI_a} \leq \sqrt{2} - 1$$

۲. فرض کنید $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که $f(x) - 3x$ و $f(x) - x^3$ توابعی صعودی‌اند. نشان دهید $f(x) - x^2 - x$ نیز صعودی است. (تابع g را صعودی گوئیم هرگاه اگر $x \leq y$ آن‌گاه $g(x) \leq g(y)$)

۳. وزارت راه مرمت ۲۴۰۰ جاده را به ۸۰ شرکت خصوصی واگذار کرده است. این جاده‌ها ۱۰۰ شهر را به یک‌دیگر متصل می‌کنند. هر جاده بین دو شهر است و بین هر دو شهر حداکثر یک جاده کشیده شده است. می‌دانیم هر شرکت وظیفه‌ی مرمت ۳۰ جاده از بین آن‌هایی که در هر دو سرش نمایندگی دارد را به عهده گرفته است. نشان دهید شهری وجود دارد که حداقل ۸ شرکت در آن نمایندگی دارند.

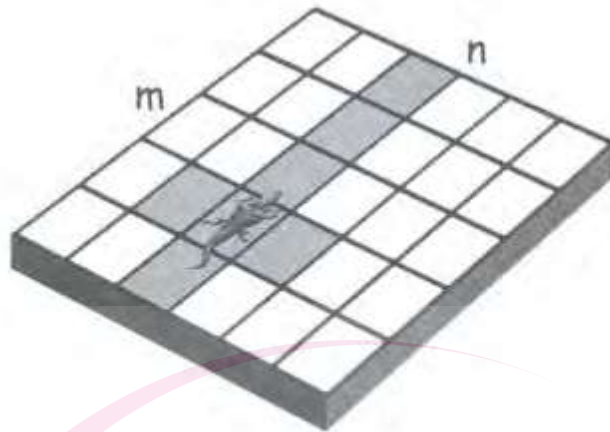


۴. همه‌ی توابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را بیابید که برای هر m و n طبیعی، $m+n$ بر $f(m) + f(n)$ بخش پذیر باشد.

۵. نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی $\angle A$ از مثلث ABC ، ضلع BC و دایره‌ی محیطی مثلث ABC را به ترتیب در M و D قطع می‌کند. خطی گذرنده از نقطه‌ی D دایره‌ی به مرکز M و شعاع MB را در X و Y قطع کرده است.

ثابت کنید خط AD زاویه‌ی $\angle XAY$ را نصف می‌کند.

۶. مهره‌ی تمساح در جدول $m \times n$ ($m \geq 4$) می‌تواند همه‌ی خانه‌های هم‌ستون خودش و همین‌طور خانه‌های مجاور هم‌سطرش را تهدید کند. حداقل چه تعداد مهره‌ی تمساح لازم است در جدول گذاشته شود تا هر خانه دست‌کم توسط یک تمساح تهدید شود؟ (توجه کنید که تمساح‌ها باید عمودی باشند).



المپیاد ریاضی پی‌مثبت
@pi_mosbat_math

۶.۰ سؤالات مرحله دوم بیست و سومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۴

۱. n عددی طبیعی بزرگتر از یک و p عددی اول است که $n|p-1$ و $p|n^3-1$. نشان دهید $3-p-4p$ مربع کامل است.

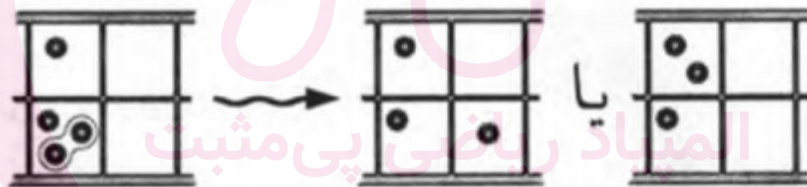
۲. در مثلث ABC ، $\angle A = 60^\circ$. نقطه‌ی متغیر D روی پاره خط BC را در نظر بگیرید. فرض کنید O_1 مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABD و O_2 مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ACD باشد. محل تقاطع BO_1 و CO_2 را M و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث DO_1O_2 را N می‌نامیم. ثابت کنید خط MN از نقطه‌ی ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۳. کهکشان راه دوقی (!) بیش از یک میلیون ستاره دارد. نشان دهید، هر لحظه، فاصله‌های دوبره‌دوی این ستاره‌ها شامل دست‌کم ۷۹ عدد متمایز است. (هر ستاره را یک نقطه فرض کنید).

۴. در برخی خانه‌های یک جدول $n \times 2$ تعدادی مهره قرار دارد.



اگر در خانه‌ای بیش از یک مهره باشد، می‌توانیم دو مهره از آن خارج کنیم و در عوض یک مهره در خانه‌ی سمت راستش و یا یک مهره در خانه‌ی بالایی‌اش قرار دهیم.



فرض کنید که در ابتدا دست‌کم 2^n مهره در جدول وجود داشته باشد. ثابت کنید می‌توان مهره‌ها را طوری جابه‌جا کرد که یک مهره به خانه‌ی انتهایی که در شکل با ستاره مشخص شده است، برسد.

۵. BC یک قطر دایره و XY وتری عمود بر BC است. نقاط P و M به ترتیب روی XY و CY یا امتداد آن‌ها به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که $PB \parallel CY$ و $MP \parallel CX$. محل تقاطع PB و CX را K می‌نامیم. ثابت کنید $PB \perp MK$.

۶. تمام توابع $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$(x+y)f(f(x)y) = x^2f(f(x)+f(y))$$

منظور از $\mathbb{R}^+$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است. (توجه کنید که صفر عددی مثبت نیست).

۷.۰ سؤالات مرحله دوم بیست و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۵

۱. فرض کنید دایره‌ی C_2 از مرکز دایره‌ی C_1 گذشته و آن را در نقاط M و N قطع کرده است. نشان دهید اگر نقاط A و B دو سر قطر دلخواهی از C_1 و A' و B' محل تقاطع خط‌های AM و BN با دایره‌ی C_2 باشند، $A'B'$ برابر شعاع دایره‌ی C_1 است.

۲. همه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی $P(x, y)$ را بیابید که برای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$P(x + y, x - y) = 2P(x, y)$$

۳. در طول شب، ستاره‌های آسمان، در بازه‌های زمانی مختلف، قابل رؤیت هستند. فرض کنید از بین هر k ستاره ($k > 1$) دست‌کم دو تایشان را می‌توان در یک لحظه در آسمان دید. نشان دهید می‌توانیم $k - 1$ عکس در لحظات مختلف از سرتاسر آسمان بگیریم که هر کدام از آن ستاره‌ها، دست‌کم در یکی از عکس‌ها دیده شود. (تعداد ستاره‌ها متناهی است. لحظاتی را که ستاره‌ی i ام در آسمان دیده می‌شود بازه‌ی بسته‌ی $[a_i, b_i]$ بنامید که در آن $a_i < b_i$).

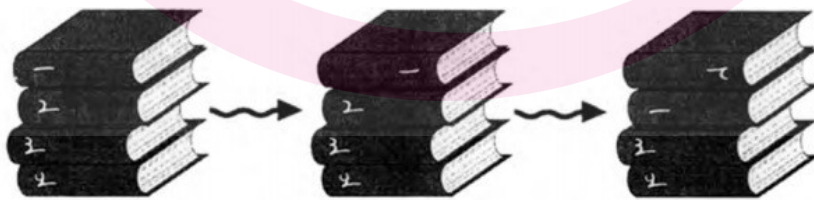
۴. الف) عدد طبیعی m بزرگ‌تر از یک است. ثابت کنید تنها متناهی عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $mn + 1$ بر $m + n$ بخش‌پذیر است.

ب) برای اعداد طبیعی متمایز $m, n > 2$ ثابت کنید دنباله‌ی $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ از اعداد طبیعی بزرگ‌تر از دو موجود است که $a_0 = m$ ، $a_k = n$ و برای هر $i = 0, 1, \dots, k - 1$ داریم:

$$a_i + a_{i+1} \mid a_i a_{i+1} + 1$$

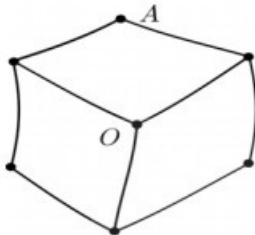
۵. نقاط A, B, C و D با همین ترتیب روی دایره‌ای قرار دارند. نشان دهید تعداد نقطه‌های روی دایره، مانند M که $\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC}$ چهارتاست و به علاوه قطرهای چهارضلعی حاصل از آن نقطه‌ها بر هم عمود هستند.

۶. تعدادی کتاب روی هم قرار گرفته‌اند. فردی ابتدا کتاب بالایی را پشت و رو می‌کند. سپس دو کتاب بالایی را پشت و رو می‌کند. بعد سه کتاب بالایی را پشت و رو می‌کند و الی آخر. پس از این که به آخرین کتاب رسید همان کار را از ابتدا شروع می‌کند. ثابت کنید پس از تعدادی جابه‌جایی، کتاب‌ها دقیقاً به همان وضعیت اول برمی‌گردند.



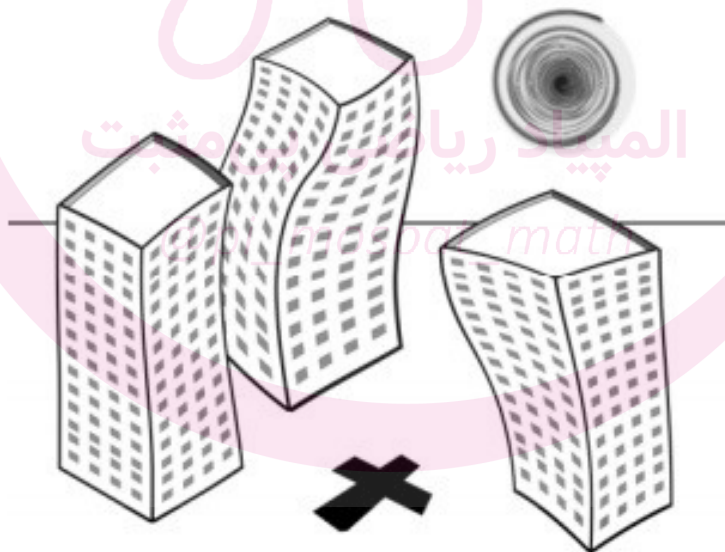
۸.۰ سؤالات مرحله دوم بیست و پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۶

۱. در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه است. نقطه‌ی M وسط ضلع BC است. نقطه‌ی D را روی ضلع AC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD = AM$. محل برخورد دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های AMC و BDC را P می‌نامیم. نشان دهید خط CP نیم‌ساز زاویه‌ی ACB است.



۲. دو رأس مکعبی را O و A نامیده‌ایم به طوری که OA قطر یکی از وجوه مکعب است. تعداد مسیرهای به طول ۱۳۸۶ از O به خودش بیش‌تر است یا از A به A ? (یک مسیر به طول n عبارت است از دنباله‌ای از $n+1$ رأس مکعب که هر دو رأس متوالی در دنباله، دو سر یک ضلع مکعب باشند).

۳. در شهری تعدادی ساختمان وجود دارد. می‌گوییم ساختمانی به ساختمانی دیگر مشرف است اگر خط واصل از بالای ساختمان اول به بالای ساختمان دوم با زمین زاویه‌ای بیش از 45° بسازد. می‌خواهیم در مکانی داده‌شده ساختمان جدیدی بسازیم. نشان دهید اگر ساختمان‌های قبلی به هم مشرف نباشند، می‌توان این کار را طوری انجام داد که باز هم هیچ ساختمانی به دیگری مشرف نباشد. شهر را صفحه‌ی افقی و هر ساختمان را پاره‌خطی عمود بر روی صفحه در نظر بگیرید.



۴. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n ، می‌توان n عدد طبیعی متمایز یافت که مجموع آن‌ها مربع کامل و حاصل‌ضرب آن‌ها مکعب کامل باشد.

۵. دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقطه‌ی P بر هم مماس خارجی هستند و A نقطه‌ای داخل دایره‌ی C_1 است. دو مماس AM و AM' بر دایره‌ی C_2 رسم می‌کنیم (M و M' محل تماس مماس‌ها هستند). نقاط تقاطع دوم AM و AM' با دایره‌ی C_1 را به ترتیب N و N' می‌نامیم. نشان دهید:

$$\frac{PN}{PN'} = \frac{MN}{M'N'}$$

۶. فرهاد برای جشنواره‌ی خوارزمی ماشینی طراحی کرده است که وقتی روشن می‌شود شروع به چاپ کردن اعداد طبیعی ویژه‌ای می‌کند. خاصیت این ماشین این است که برای هر عدد طبیعی n ، دقیقاً یکی از سه عدد n ، $2n$ و $3n$ را چاپ می‌کند. می‌دانیم ماشین عدد ۲ را چاپ می‌کند. ثابت کنید ۱۳۸۲۴ چاپ نمی‌شود.

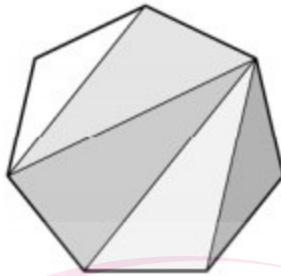


المپیاد ریاضی پی مثبت

@pi_mosbat_math

۹.۰ سؤالات مرحله دوم بیست و ششمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

۱. به چند طریق می‌توان $n-3$ قطر یک n ضلعی منتظم را طوری رسم کرد که اولاً هم‌دیگر را داخل n ضلعی قطع نکنند، ثانیاً هر کدام از مثلث‌های به وجود آمده دست‌کم یک ضلع مشترک با n ضلعی داشته باشد؟



۲. فرض کنید I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC ، متناظر با رأس A باشد و این دایره، به ترتیب، در نقاط B' و C' به امتداد AB و AC مماس باشد. I_aB و I_aC ، به ترتیب، $B'C'$ را در P و Q قطع می‌کنند و M نقطه‌ی برخورد CP و BQ است. ثابت کنید طول عمود وارد از M بر ضلع BC برابر اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است.

۳. a, b, c و d اعدادی حقیقی هستند و دست‌کم یکی از c و d صفر نیست. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید برای هر x $f(x) \neq x$ نشان دهید اگر به ازای یک a ، $f^{1387}(a) = a$ ، آن‌گاه برای هر x در دامنه‌ی $f^{1387}(x) = x$ ، $f^{1387}(f^n)$ یعنی n بار ترکیب تابع f را به ازای x نشان دهید برای هر تابع به شکل $g(x) = \frac{sx+t}{ux+v}$ ، اگر معادله‌ی $g(x) = x$ بیش از دو جواب داشته باشد آن‌گاه برای هر x ، $g(x) = x$.

۴. نشان دهید تنها عدد طبیعی a ، که برای هر n طبیعی $4(a^n + 1)$ مکعب کامل باشد، یک است.



۵. می‌خواهیم برای تلفن‌های یک شهر شماره انتخاب کنیم. شماره‌ها ده‌رقمی‌اند و از رقم صفر نباید در آن‌ها استفاده شود. هدف این است که از برخی از شماره‌ها استفاده نکنیم تا هر دو شماره‌ی موجود یا در بیش از یک رقم اختلاف داشته باشند و یا در یک رقم بیش از یک واحد اختلاف داشته باشند. بیش‌ترین تعداد شماره که می‌تواند استفاده شود چند تا است؟ انتخاب این بیش‌ترین تعداد شماره، به چند شکل ممکن است؟

۶. فرض کنید در مثلث ABC ، H پای ارتفاع وارد بر BC باشد. از H بر AB و AC عمود می‌کشیم تا، به ترتیب، نقاط T و T' به دست آیند. نشان دهید اگر O مرکز دایره‌ی محیطی ABC باشد و $AC = 2OT$ ، $AB = 2OT'$ آن‌گاه

۱۰۰. سؤالات مرحله دوم بیست و هفتمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۸

۱. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی دو است که قدر مطلق آن در سه نقطه‌ی -۱ ، ۰ و ۱ کم‌تر یا مساوی یک است. نشان دهید برای هر $x \in [-۱, ۱]$

$$|p(x)| \leq \frac{5}{4}$$

۲. یک باغ مربعی شکل را به یک شبکه‌ی ۵۰×۵۰ از قطعات ۱ متر در ۱ متر تقسیم کرده‌ایم و در بعضی از قطعه‌ها یک درخت سیب، انار یا هلو کاشته‌ایم. می‌دانیم که مجاور هر درخت انار، دست‌کم یک درخت سیب و مجاور هر درخت هلو دست‌کم یک درخت انار است و یک درخت سیب وجود دارد. به علاوه مجاور هر قطعه‌ای که در آن درختی نیست، از هر سه نوع درخت وجود دارد. (دو قطع را مجاور گوییم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند). نشان دهید تعداد قطعات خالی از ۱۰۰۰ تا بیش‌تر نیست.



@pi_mosbat_math

۳. فرض کنید نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A از مثلث ABC ضلع BC را در D و دایره‌ی محیطی مثلث را در M قطع کند. از D خطی رسم می‌کنیم که دو نیم‌خط MB و MC (با نقطه‌ی شروع M) را در نقاط P و Q قطع کند. ثابت کنید $\angle PAQ \geq \angle A$.

۴. $n(n+2)$ سرباز تازه کار در n ستون برابر در کنار هم، به فاصله‌ی یک قدم، ایستاده‌اند. با فرمان فرمانده، هر سرباز یا سر جایش می‌ایستد یا به یکی از چهار جهت یک قدم برمی‌دارد! پس از جابه‌جایی، سربازها در $n+2$ ستون برابر، به شکل منظم، قرار گرفته‌اند، به نحوی که دو سطر اول و آخر حذف و دو ستون به چپ و راست اضافه شده است. ثابت کنید n زوج است.



۵. اعداد طبیعی $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ دارای این خاصیت هستند که برای هر i و j متمایز، a_i بر $a_j - a_i$ بخش پذیر است. نشان دهید که برای هر $i < j$ ،

$$ia_j \leq ja_i$$

۶. ۱۱ نفر دور یک میز دایره‌ای به شکل منظم نشسته‌اند و ۱۱ کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۱ بین آن‌ها پخش شده است؛ ممکن است برخی کارت نداشته باشند و برخی بیش از یک کارت داشته باشند. در هر مرحله یک نفر می‌تواند یکی از کارت‌های خود را به فرد مجاورش بدهد در صورتی که اگر شماره‌ی آن کارت i باشد، قبل و بعد از این عمل، مکان سه کارت $i-1$ ، i و $i+1$ تشکیل یک مثلث حاده‌الزاویه ندهند. (منظور از کارت شماره‌ی ۰ کارت شماره‌ی ۱۱ و منظور از کارت شماره‌ی ۱۲، کارت شماره‌ی ۱ است!)

فرض کنید که در ابتدا کارت‌های ۱ تا ۱۱ به ترتیب در جهت عقربه‌های ساعت، به افراد داده شده باشد. ثابت کنید هیچ‌گاه کارت‌ها در دست یک نفر جمع نخواهد شد.

@pi_mosbat_math

۱۱.۰ سؤالات مرحله دوم بیست و هشتمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

۱. a و b دو عدد طبیعی اند و $a > b$. اگر دو عدد $ab - ۱$ و $a + b$ نسبت به هم اول باشند و $ab + ۱$ و $a - b$ هم نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید $(ab + ۱)^2 + (a - b)^2$ مربع کامل نیست.

۲. n نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها بر روی یک خط نیستند. ثابت کنید تعداد مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها از بین این n نقطه باشند و مساحت آن‌ها یک باشد، از $\frac{2}{3}(n^2 - n)$ بیش‌تر نیست.

۳. دایره‌های W_1 و W_2 در P و D متقاطع‌اند. A و B به ترتیب روی W_1 و W_2 هستند به طوری که AB بر دو دایره مماس است. فرض کنید D نزدیک‌تر از P به خط AB باشد. AD دایره W_2 را برای بار دوم در C قطع می‌کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید:

$$\angle DPM = \angle BDC$$

۴. ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عددهای حقیقی اند و

$$\min\{d, b + d\} > \max\{|c|, |a + c|\}$$

ثابت کنید که معادله $P(x) = ۰$ در بازه $[-۱, ۱]$ جواب ندارد.

۵. در مثلث ABC ، $\angle A = ۶۰^\circ$. اضلاع AB و AC را از طرف B و C امتداد می‌دهیم و به ترتیب E و F را روی این امتدادها طوری در نظر می‌گیریم که $BE = CF = BC$. نقطه K محل برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ACE با EF (به غیر از E) است. ثابت کنید K روی نیم‌ساز زاویه A قرار دارد.



۶. مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد و تعدادی کلاس فوق برنامه برای آن‌ها تدارک دیده شده است که هر دانش‌آموز می‌تواند در هر تعداد از کلاس‌ها ثبت نام کند. در هر کلاس حداقل دو دانش‌آموز ثبت نام کرده‌اند. می‌دانیم که اگر دو کلاس مختلف، حداقل دو دانش‌آموز مشترک داشته باشند، آنگاه تعداد اعضای آن دو کلاس، متفاوت است. ثابت کنید تعداد کلاس‌ها از $(n - ۱)^2$ بیش‌تر نیست.

۱۲۰. سؤالات مرحله دوم بیست و نهمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

۱. ۱۳۹۰ مورچه روی زمین در اطراف یک خط راست طوری قرار گرفته‌اند که فاصله‌ی سر هر کدام تا خط کم‌تر از یک سانتی‌متر است. ثابت کنید اگر فاصله‌ی سر هر دو مورچه بیش‌تر از دو سانتی‌متر باشد فاصله‌ی سر دست‌کم دو مورچه بیش‌تر از ده متر است. (فرض کنید سر هر مورچه یک نقطه است!)



۲. در مثلث ABC داریم $\angle ABC = 60^\circ$. از رأس B عمودی بر ضلع AC رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BAC$ را در نقطه‌ی D قطع کند. همچنین از رأس C عمودی بر ضلع AB رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle ABC$ را در نقطه‌ی E قطع کند. ثابت کنید $\angle BED \leq 30^\circ$.

۳. همه‌ی دنباله‌های صعودی $a_1, a_2, a_3, \dots$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $i + j$ با تعداد مقسوم‌علیه‌های $a_i + a_j$ برابر باشد. (صعودی بودن دنباله یعنی اگر $i \leq j$ آن‌گاه $a_i \leq a_j$).

۴. کوچک‌ترین عدد طبیعی n را بیابید که n عدد حقیقی در بازه‌ی $(-1, 1)$ وجود داشته باشند که مجموع آن‌ها صفر و مجموع مربع‌های آن‌ها ۲۰ باشد.

۵. رنگین‌کمان نام پرنده‌ای کم‌یاب است. این پرنده‌ی زیبا می‌تواند به n رنگ مختلف درآید و هر روز رنگی متفاوت از روز قبل دارد. دانش‌مندان حقیقت جدیدی درباره‌ی این پرنده کشف کرده‌اند: هیچ چهار روزی در طول عمر این پرنده وجود ندارد مثل روزهای k ام، j ام، i ام و l ام، که $i < j < k < l$ و این پرنده در روزهای i ام و k ام هم‌رنگ باشد و در روزهای j ام و l ام نیز هم‌رنگ به رنگی متفاوت از روزهای i ام و k ام باشد. حداکثر طول عمر این پرنده بر حسب n چند روز است؟

۶. اضلاع AB و AC از مثلث ABC را به ترتیب از طرف B و C امتداد داده‌ایم تا خط داده شده‌ی l را به ترتیب در نقاط D و E قطع کنند. فرض کنید قرینه‌ی l نسبت به عمود منصف BC نیز امتدادهای مذکور را به ترتیب در نقاط D' و E' قطع کند. ثابت کنید اگر $BD + CE = DE$ آن‌گاه $BD' + CE' = D'E'$.

۱۳.۰ سؤالات مرحله دوم سی‌امین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۱

۱. دایره‌ی C_1 و نقطه‌ی O روی آن مفروض است. دایره‌ی C_2 به مرکز O ، C_1 را در دو نقطه‌ی P و Q قطع می‌کند. دایره‌ای است که در نقطه‌ی R بر C_2 مماس خارج و در نقطه‌ی S بر C_1 مماس داخل است و فرض کنید خط RS از نقطه‌ی Q می‌گذرد. محل برخورد دوم PR و OR با C_1 را به ترتیب X و Y می‌نامیم. ثابت کنید QX با SY موازی است.

۲. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. به چند طریق می‌توان اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ را دور یک دایره قرار داد به شکلی که هر عدد مقسوم‌علیه‌ی از مجموع دو عدد مجاورش باشد؟

۳. ثابت کنید اگر t عددی طبیعی باشد عدد طبیعی $n > 1$ وجود دارد که نسبت به t اول است و هیچ‌کدام از اعداد

$$n + t, n^2 + t, n^3 + t, \dots$$

توان کامل نیستند.

(دو عدد نسبت به هم اول هستند اگر تنها مقسوم‌علیه مشترک مثبت آن دو، یک باشد و به عدد طبیعی a توان کامل گفته می‌شود اگر اعداد طبیعی b و m موجود باشند که $a = b^m$ و $m \geq 2$)

۴. الف) آیا زیرمجموعه‌های دو عضوی $A_1, A_2, A_3, \dots$ و... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعی n ، مجموع اعضای A_n برابر $1391 + n$ باشد؟

ب) آیا زیرمجموعه‌های دو عضوی $A_1, A_2, A_3, \dots$ و... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعی n ، مجموع اعضای A_n برابر $1391 + n^2$ باشد؟

۵. چندجمله‌ای درجه‌ی دوی $x^2 + ax + b$ ، با ضرایب حقیقی، را در نظر بگیرید. می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای این که بتوان آن را در اعداد حقیقی تجزیه کرد این است که دلتای آن، یعنی $a^2 - 4b$ ، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. توجه کنید که دلتا نیز یک چندجمله‌ای با متغیرهای a و b است. نشان دهید چیزی مشابه دلتا برای چندجمله‌ای‌های درجه‌ی چهار وجود ندارد: ثابت کنید چندجمله‌ای چهار متغیره‌ی $P(a, b, c, d)$ با خاصیت زیر وجود ندارد:

چندجمله‌ای درجه‌ی چهار $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ قابل تجزیه به حاصل ضرب چهار چندجمله‌ای درجه‌ی یک باشد اگر و تنها اگر $P(a, b, c, d) \geq 0$.

۶. دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D, E و F به ترتیب بر اضلاع BC, CA و AB مماس است. قرینه‌ی نقاط F و E را به ترتیب نسبت به B و C ، نقاط T و S می‌نامیم. ثابت کنید مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ATS درون یا روی دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC قرار دارد.

۱. همه‌ی a و b های طبیعی و نسبت به هم اول را بیابید که $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$.
(توضیح: اگر $a = ۹۲$ و $b = ۱۳$ ، آن گاه b/a برابر سیزده و نود و دو صدم است.)

۲. فرض کنید اعداد طبیعی $w_1, w_2, \dots, w_n$ وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_1 + w_2 + \dots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنه‌ی کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه‌ی وزنه‌های باقی‌مانده نیز کامل است.



۳. مثلث دل‌خواه ABC داده شده است. وسط کمان $\widehat{BC}$ از دایره‌ی محیطی مثلث که شامل رأس A نیست را M می‌نامیم. از نقطه‌ی O ، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث، دو خط به موازات MB و MC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس A در مثلث، با دایره‌ی محیطی در نقطه‌ی N تلاقی کند آن گاه $NK = NL$.

۴. فرض کنید C یک دایره و P نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس PA و PB را بر دایره رسم و نقطه‌ی K را روی پاره‌خط AB انتخاب کرده‌ایم. دایره‌ی محیطی مثلث PBK برای بار دوم دایره‌ی C را در نقطه‌ی T قطع می‌کند. قرینه‌ی P نسبت به A را P' می‌نامیم. نشان دهید $\angle PBT = \angle P'KA$.

۵. در خانه‌های یک جدول $n \times m$ اعداد صحیح نوشته شده است. منظور از یک ردیف اریب، خانه‌هایی از جدول است که تفاضل شماره‌ی ستون و شماره‌ی سطر آن‌ها برابر مقداری ثابت است. می‌خواهیم طی چند مرحله اعداد داخل جدول را صفر کنیم. در هر مرحله می‌توانیم خانه‌های یک ردیف افقی یا یک ردیف عمودی و یا یک ردیف اریب را انتخاب و از همه یک واحد کم کنیم یا به همه یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید اگر بتوان اعداد داخل هر زیرجدول ۳×۳ را، صرف نظر از خانه‌های دیگر، صفر کرد آن گاه می‌توان همه‌ی اعداد داخل جدول را صفر کرد. به عنوان مثال در جدول ۵×۹ زیر، خانه‌های یکی از ردیف‌های اریب و خانه‌های یکی از زیرجدول‌های ۳×۳ مشخص شده‌اند. توجه کنید که خانه‌ی گوشه‌ی راست-بالا (سطر ۱، ستون ۹) نیز به تنهایی یک ردیف اریب حساب می‌شود.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱						↘			
۲		❄	❄	❄			↘		
۳		❄	❄	❄				↘	
۴		❄	❄	❄					↘
۵									

۶. دنباله‌ی $\{a_n\}$ از اعداد طبیعی در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+2} = \left\lfloor \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right\rfloor$$

که در آن منظور از $[x]$ ، جزء صحیح عدد x است. ثابت کنید عدد طبیعی m وجود دارد که $a_m = 4$ و

$$a_{m+1} \in \{3, 4\}$$

المپیاد ریاضی پی‌مثبت

@pi_mosbat_math