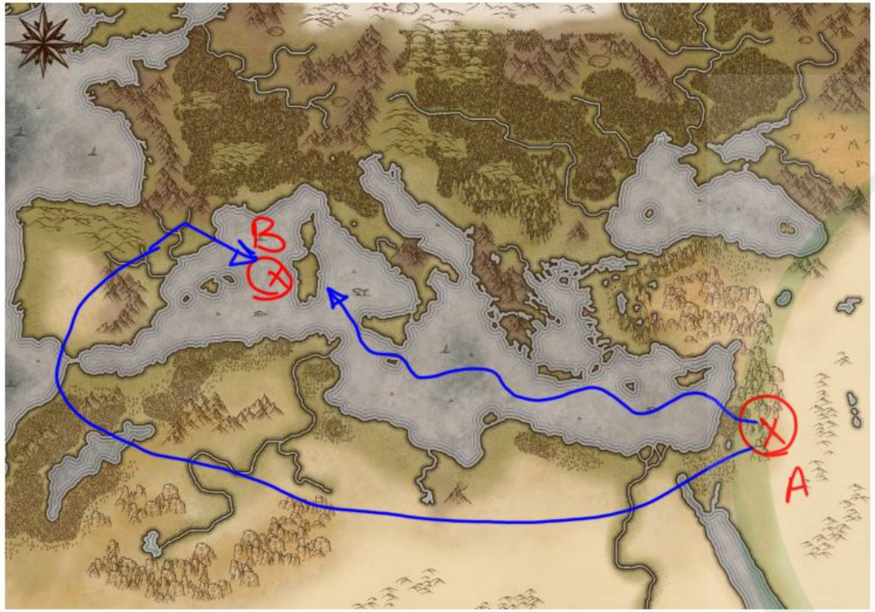
بسم الله الرحمن الرحیم

* نسبیت عام

- هندسه نااقلیدسی
- فضا-زمان غیرتخت
- پدیده های نامأنوس با تجربه عرفی (مثل اتساع زمان، ...)
- نگاه خاص به گرانش

...



فرم هموردای مکانیک کلاسیک

* دستگاه های مختصات

دکارتی (x, y, z)

استوانه‌ای (ρ, ϕ, z) / قطبی (r, ϕ)

کروی (r, θ, ϕ)

$\vdots$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

$\vec{F} = m\vec{a}$ قانون دوم نیوتن

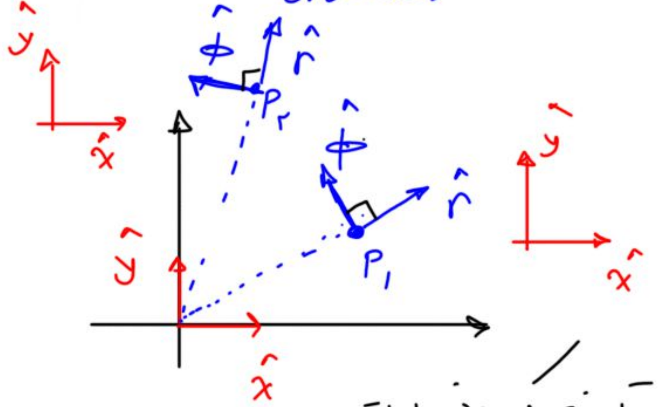
$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \end{cases} \quad \rightleftarrows \quad \begin{cases} F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \\ F_\phi = m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \end{cases}$$

$\cancel{F_r = m\ddot{r}}$

$\cancel{F_\phi = m\ddot{\phi}}$

دستگاه دکارتی

دستگاه قطبی



دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد

(u, v, w)

$$\begin{cases} F_u = \cdots \\ F_v = \cdots \\ F_w = \cdots \end{cases}$$

فرم کلی که در همه دستگاه‌های مختصات فرم یکسانی داشته باشه.

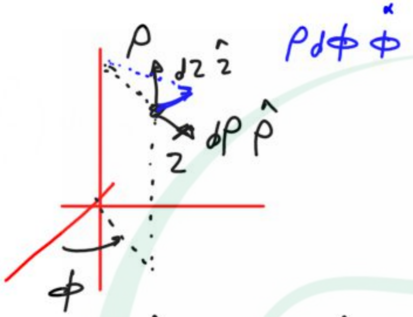
فرم موردای قانون دوم نیوتن

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

گرادیان

$f_{(x,y,z)}$

$f_{(\vec{r})}$



$$\vec{dr} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\, d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

$f_{(\rho,\phi,z)}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\right)}_{\vec{\nabla} f} \cdot \underbrace{\left(d\rho\,\hat{\rho} + \rho\, d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}\right)}_{\vec{dr}}$$

$g_{(x_1, x_2, \dots x_n)}$

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

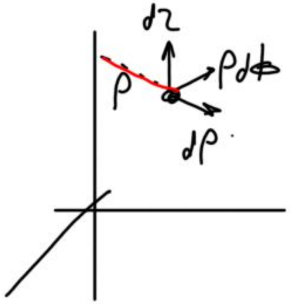
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot \left(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\right)$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \underbrace{\vec{dr}}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

* دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد



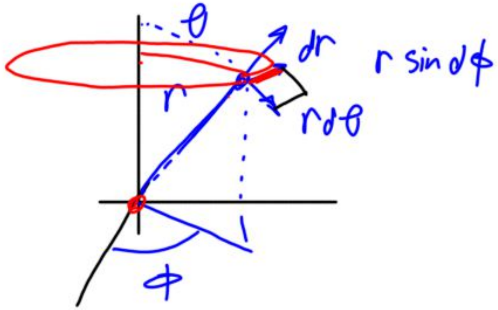
دکارتی $\vec{dr} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$

استوانه‌ای $\vec{dr} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\, d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$

کروی $\vec{dr} = 1dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\, d\phi\,\hat{\phi}$

قطبی

$\vec{dr} = dr\,\hat{r} + r\,d\phi\,\hat{\phi}$



$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

متریک

نمایش متریک در دستگاه کروی

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(u, v, w)

$dl^2 = ???$

دکارتی (x, y, z)

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

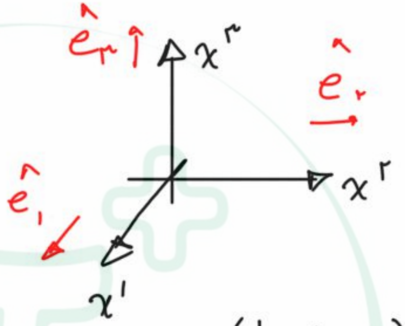
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

* نمادگذاری اندیسی

index notation

گام اول : $x, y, z \rightarrow x^1, x^2, x^3$



گام : استفاده از $\sum$

(x^1, x^2, x^3) $\quad (x^i) \quad \underbrace{i = 1, 2, 3}$

A^i (بردار پادوردا) اندیس بالا

A_i (بردار هموردا) اندیس پایین

$$\vec{A} = \underbrace{A^1 \hat{e}_1 + A^2 \hat{e}_2 + A^3 \hat{e}_3} = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} A^i \hat{e}_i}$$

$$A^i \hat{e}_i$$

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{20} A^i \hat{e}_i$$

گام سوم : توافق جمع زنی انشتین

هرگاه در یک جمله ، اندیس تکراری مشاهده کردید ، روی آن اندیس یک $\sum$ وجود دارد.

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3$

(اول سامانه) $N = 20$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = \underbrace{A^iB_i}_{\text{dummy index}} \equiv \sum_{i=1}^{3} A^iB_i$

اندیس ظاهری — dummy index

صرفاً یک شماره است

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A^iB_i$

$\underbrace{(\vec{A}+\vec{B})^i}_{\text{free index}} = A^i + B^i$

اندیس واقعی

free index

۱، ۲، ۳	اندیس انگلیسی	$i, j, k, \dots$	سه بعد
۱، ۲، ۳، ۴	اندیس یونانی	$\mu, \nu, \dots$	چهار بعد

نسبیت

$A^\mu B_\mu$ $\quad$ A^iB_i

$A^\mu B_\mu = A^\nu B_\nu = A^\sigma B_\sigma$

```
for j = 1 to 20
    b = b + a_j
```

$\sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{j=1}^{10} a_j$

$a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$

$\sum_{b=1}^{10} a_b$

* گام چهارم :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f$$

$$\hookrightarrow \partial_1 f$$

$$\frac{\partial}{\partial x^n} \equiv \partial_n$$

$$\vec{\nabla} f = \partial_i f \, \hat{e}_i$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^i} \hat{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x^1} \hat{e}_1 + \cdots$$

$$(\vec{\nabla} f)_i = \partial_i f$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \partial_i V^i$$

دیورژانس (دکارتی)

* گام پنجم : معرفی دلتای کرونکر

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\delta_{11} = 1$$

$$\delta_{12} = 0$$

$$\delta_{33} = 1$$

$F^{i}\delta_{ij} = ?$

$F^{i}\boxed{\delta_{ij}} = F^{j}$

$i=j$

$$\sum_{i=۱}^{۳} F^{i}\delta_{ij} = F^{۱}\delta_{۱j} + F^{۲}\delta_{۲j} + F^{۳}\delta_{۳j} = F^{j}$$

δ_{ij}

(۳ بعد)

$$\begin{pmatrix} \delta_{۱۱} & \delta_{۱۲} & \delta_{۱۳} \\ \delta_{۲۱} & \delta_{۲۲} & \delta_{۲۳} \\ \delta_{۳۱} & \delta_{۳۲} & \delta_{۳۳} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \quad I_{۳}$$

هدف : ساده نویسی فرمول ها

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{V}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{V} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$$

???

$$\partial_i (f V^i) = \underbrace{(\partial_i f)}_{(\nabla f)_i} V^i + f \underbrace{(\partial_i V^i)}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}} = (\vec{\nabla} f)_i V^i + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{V} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$$

A^i — مؤلفه i ام بردار A

$\partial_i f$ — مؤلفه i ام گرادیان

$A^i B_i$ — ضرب داخلی

$\partial_i V^i$ — دیورژانس

$\vdots$

$$\vec{\nabla}(fg) = (\vec{\nabla} f) g + f(\vec{\nabla} g) \checkmark\checkmark$$

$$\partial_i (fg) \hat{e}_i = \underbrace{(\partial_i f)}\, g\, \underbrace{\hat{e}_i} + f(\partial_i g) \hat{e}_i$$

$$= (\vec{\nabla} f) g + (\vec{\nabla} g) f$$

حاصلضرب سه‌گانه

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

قواعد حاصلضرب

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

$$\partial_i (f A^i) = (\partial_i f) A^i + f(\partial_i A^i)$$

$\vec{A} \times \vec{B} \rightarrow$ نماد جایگشت

ϵ_{ijk} [اپسیلون لوی چویتا]

مشتقهای دوم

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$